У нескінченній множині не можна вказати останнього елемента.

Вправи

10. Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.

11. Назвіть кількість елементів у наведених множинах і зробіть, де можливо, відповідні записи: A — множина учнів вашого класу; B — множина класів вашої школи; C — множина сьомих класів вашої школи; K — множина цифр; M — множина букв українського алфавіту; T — множина риб у Дніпрі; P — множина листочків на дереві; H — множина зірок на небі; $У$ — множина прямих, що проходять через одну точку; E — множина спільних точок двох паралельних прямих.

12. Прочитайте записи: $n(A) = 2$; $n(B) = 10$; $n(C) = 100$. Наведіть приклади таких множин.

Тетяна ЗАЙЦЕВА

Використання комп'ютерних програм на уроках алгебри та початків аналізу

Одним з найважливіших факторів, що спонукають до навчання, є мотив досягнення успіху. Психологами спеціально розроблений метод навчання, що носить назву «стратегія формування успіху». Сутність цього методу полягає в тому, що кожен учень працює на рівні своїх можливостей і успішно долає навчальні завдання. Застосування нових інформаційних технологій дає змогу створити для таких школярів навчальні проблеми, які вони здатні розв'язати, і виробити в них позитивну мотивацію навчання. Завдяки перекладанню основної маси технічних операцій на комп'ютер учень починає розв'язувати завдання, досягнутий успіх народжує у нього віру в свої сили і збуджує прагнення до подальшого вдосконалення. НІТ — це інструмент, який за правильного застосування дозволяє перетворити навчання з примусового в добровільне, що супроводжується почуттям задоволення від успішного подолання труднощів.

Розглянемо кілька прикладів використання засобів НІТН при вивченні тем курсу алгебри і початків аналізу, які належать до поняття похідної та застосування похідної до дослідження функцій.

Різні підходи до введення поняття похідної здебільшого пов'язані з вибором задачі, на основі якої розгортається пояснення. Можливі три варіанти: 1) пояснення будуються на основі задачі про дотичну до кривої; 2) на основі задачі про миттєву швидкість нерівномірного руху; 3) на основі двох зазначених задач.

Автори підручників по-різному розв'язують це питання, але здебільшого дотримуються третього варіанта. Розглянемо перший варіант. Перше ознайомлення з поняттям похідної пов'язується з задачею на побудову дотичної, в учнів створюється певний наочний образ похідної — це тангенс кута, утвореного дотичною і віссю Ox. Проте психологічні дослідження вказують, що для деяких учнів наочний образ може мати і негативний вплив на формування понять. Часто учні звертають увагу на те, що більш впадає в око, а не на суть питання. Наприклад, образ похідної пов'язується не з тангенсом кута, а з самою дотичною. Вихід з цієї ситуації — по-перше, вчителю більше уваги приділяти і підкреслювати суть цього питання; по-друге, вибирати інші варіанти пояснення матеріалу.

Вважаємо за доцільне спочатку розглянути лише задачу про миттєву швидкість і на деякий час відкласти розгляд задачі на побудову дотичної. Пояснити це можна кількома причинами. По-перше, учні чітко відрізнятимуть аналітичне означення похідної від її геометричного тлумачення. По-друге, з задачею на знаходження швидкості нерівномірного руху учні зустрічались на уроках фізики, тобто це для них знайомий матеріал, а поняття дотичної, як граничного положення січної, є новим і не таким простим для учнів. По-третє, геометричне тлумачення похідної не таке важливе при введенні формул для обчислення похідних, як пізніше при дослідженні функцій за допомогою похідної.

Відповідно до цього розділ, присвячений похідній, можна поділити на два блоки: 1) введення поняття похідної як швидкості зміни функції відносно зміни аргументу, ознайомлення з формулами обчислення похідних; 2) геометричний зміст похідної, дослідження функцій за допомогою похідної, побудова графіків та розв'язування задач практичного змісту.

На наш погляд, теми, які відносяться до введення поняття похідної, ознайомлення з похідними елементарних функцій та схеми обчислення похідних доцільно розглядати з епізодичним використанням комп'ютерних програм. Головна мета цих уроків — навчити учнів обчислювати похідні функцій. На відміну від цих тем, викладання таких тем, як геометричний зміст похідної, дотична до графіка функції, проміжки монотонності, застосування похідної до дослідження функцій та розв'язування прикладних задач, будується на використанні інформаційних технологій на різних етапах уроку.

Наведемо деякі приклади використання програмного засобу GRAN1.

© Т. ЗАЙЦЕВА, 2001

Тема: **ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ**

Подання навчального матеріалу доцільно розпочати з актуалізації опорних знань учнів щодо поняття про гладку та негладку криві. А саме, учням варто нагадати на прикладах, яку криву вважають гладкою. Вчитель пропонує учням скористатися програмою GRAN1, побудувати графіки кількох функцій: $y = x^2$; $y = x^3$; $y = |x|$; $y = |x^2 - 1|$, проаналізувати поведінку цих графіків і зробити висновки. Розгляд зазначених графічних моделей сприяє формуванню в учнів наочного уявлення про гладкі криві.

Подання нового матеріалу. Вчитель разом з учнями будує параболу, акцентує увагу учнів на аналізі поведінки даної кривої, наприклад, на проміжку [0,5; 1,5]. За допомогою послуг програми GRAN1 учні починають збільшувати масштаб зображення спочатку в 10 разів, потім у 100, і проводять порівняльний аналіз поведінки графіка на заданому проміжку.

Частина тієї самої параболи при різних одиницях масштабу виглядає по-різному: на першому графіку вона виглядає кривою, на другому — кривизна менш помітна, а на третьому — крива майже не відрізняється від відрізка прямої (мал. 1, 2, 3).

Висновок: гладка крива наближається до відрізка прямої при зменшенні околу фіксованої точки x_0. Інакше поводить себе графік функції $y = |x|$: немає такої прямої, яка близька до графіка цієї функції в околі точки $x_0 = 0$.

Тоді виникає задача про визначення точного положення прямої, до якої прямує гладка крива. Для точнішого пояснення, що собою являє дотична, можна скористатися граничним переходом. За допомогою програми GRAN1 будуємо в звичайному масштабі параболу та пряму, яка є січною до параболи. Почнемо наближати одну точку до іншої, положення січної змінюватиметься, але з наближенням однієї точки до іншої, положення січної стабілізується. Граничне положення січної при наближенні однієї точки до другої і буде дотичною до параболи у даній точці.

Алгоритм виконання завдання.

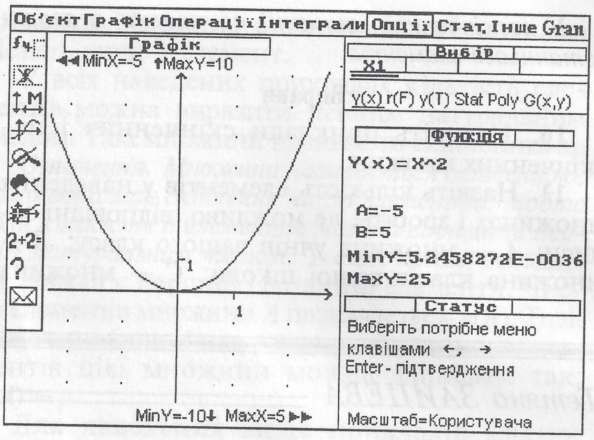
1. За допомогою послуг програми GRAN1 *Об'єкт\Нова функція* та *Графік\Побудувати* вводимо функцію $y = x^2$ і будуємо графік функції.

2. Після побудови параболи слід зафіксувати одну точку, наприклад, $x_0 = 2$. Для цього треба скористатися послугою *Операції/Дотична* і ввести координату точки x_0.

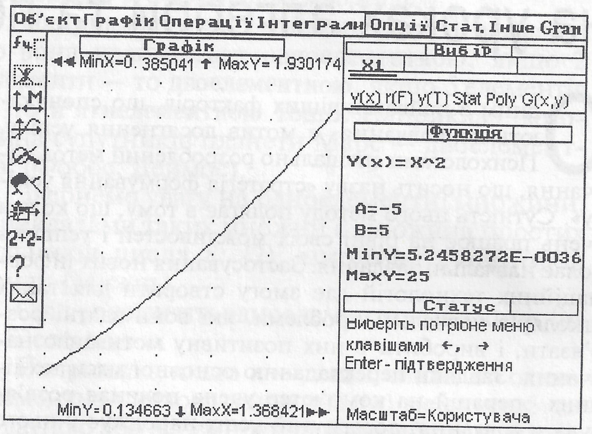
3. Надаємо аргументу x_0 приросту $\Delta x = ,5$ (за допомогою послуги *Приріст аргументу)*. Цим самим здійснимо перехід від точки з координатою x_0 до точки з координатою $x_0 + \Delta x$. Знайдемо приріст ординати Δy при переході від точки x_0 до $x_0 + \Delta x$ та величину $\Delta y/\Delta x$ (ці значення висвічуються на екрані автоматично).

4. На екрані побудовані січна та перпендикуляри до координатних осей. За допомогою переміщення вказівника (курсору) з'єднуємо точки на перпендикулярах так, щоб отримати прямокутний трикутник, аналізуючи який, учні доходять висновку, що

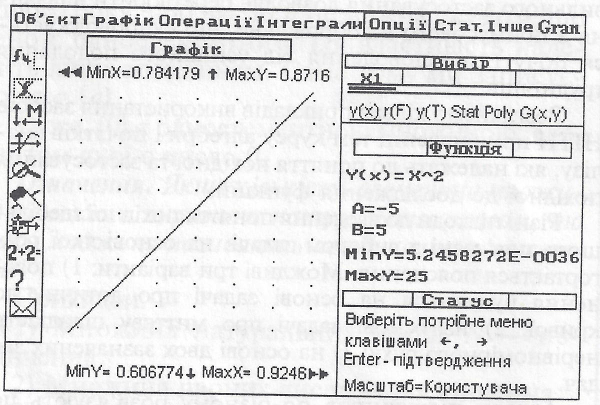
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, де α — кут між січною та віссю Ox (мал. 4).



Мал. 1



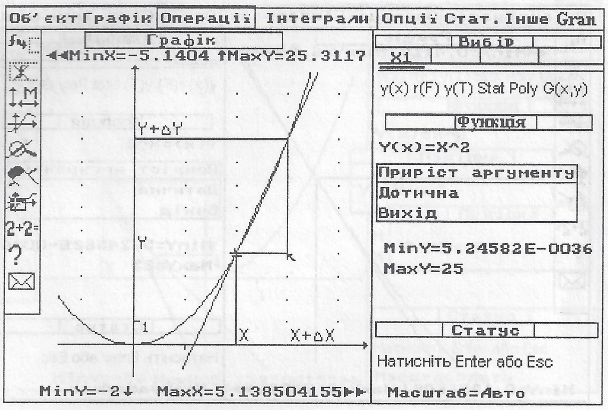
Мал. 2



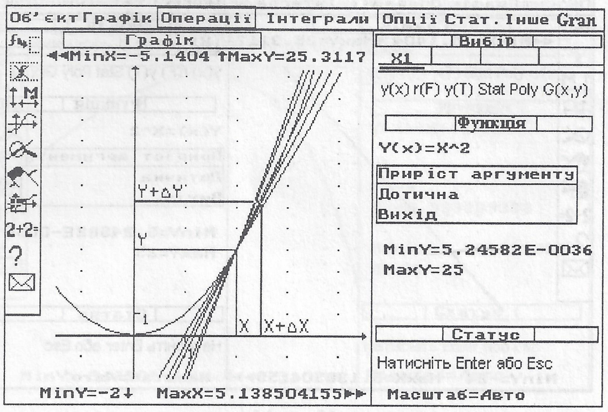
Мал. 3

5. Щоб знайти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, слід спрямувати Δx до нуля, тобто потрібно точку з координатою $x_0 + \Delta x$ переміщувати до точки з координатою x_0.

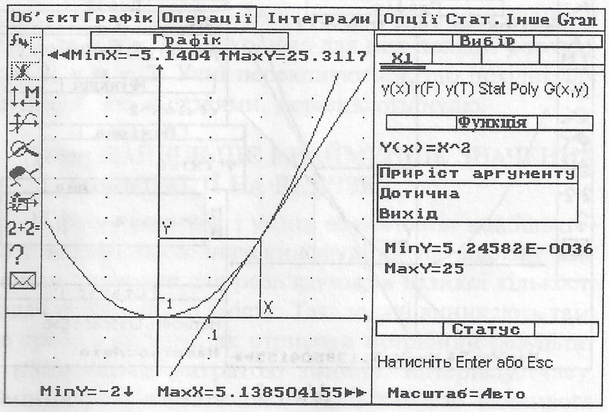
6. За допомогою послуги *Приріст аргументу* вве-



Мал. 4



Мал. 5



Мал. 6

демо кілька значень Δx за певною послідовністю: $\Delta x = 1{,}5$; $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}5$; $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta x = 0{,}05$. Кожного разу звертаємо увагу учнів на положення січної та на значення Δy, $\Delta y/\Delta x$.

7. На останньому етапі будуємо дотичну до графіка функції у точці $x_0 = 2$ — це і буде граничне положення січної (мал. 5).

Примітка: на екрані всі січні зображені одним кольором, а дотична — іншим кольором, завдяки чому підвищується наочність зображення.

Залишимо на екрані лише графіки параболи та дотичної (вилучивши інші) і збільшимо масштаб, який було прийнято раніше. При подальшому збільшенні частини параболи та дотичної майже зіллються (мал. 6, 7, 8).

Цим самим підтверджується висновок:

Пряму, з якою майже зіллється графік функції $y = f(x)$ у околі деякої точки x_0, називають дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x_0\,;\,f(x_0))$. Кутовий коефіцієнт цієї дотичної називають похідною функції $f(x)$ у точці x_0.

Далі завдання вчителя подати описану вище побудову мовою формул.

***Тема:* ДОТИЧНА ДО ГРАФІКА ФУНКЦІЇ**

На початку уроку доцільно нагадати учням, що дотичну до графіка функції ми розглядали, як граничне положення січної. Кутовий коефіцієнт дотичної, або тангенс кута нахилу дотичної до осі Ox, ми називали похідною функції. Варто ще раз побудувати графік параболи та дотичну до параболи у будь-якій точці і збільшити масштаб зображення. Учні звертають увагу, що графік параболи та графік дотичної на достатньо малому проміжку біля точки дотику майже зливаються. Тобто, наявність похідної функції у точці x_0 означає, що для малих Δx: $\Delta f/\Delta x \approx f'(x_0)$.

Переходимо до геометричного тлумачення похідної: наявність похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 означає, що існує невертикальна дотична до графіка функції у точці $(x_0, f(x_0))$, причому кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює $f'(x_0)$.

Учитель разом з учнями розглядає і порівнює різні способи побудови дотичної до графіка функції (за допомогою лінійки та комп'ютерної програми).

1. Нехай задано графік функції, яка диференційовна. Для побудови дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0, f(x_0))$ треба, повертаючи лінійку біля точки A, знайти таке її положення, коли графік якомога тісніше примикає до краю лінійки. Зафіксувавши положення лінійки, проводимо дотичну.

2. За допомогою послуг програми GRAN1 будуємо графік функції. Вибираємо послугу *Операції\Дотична*; вказуємо абсцису точки дотику. На екрані з'являється графік дотичної у вказаній точці.

Учні аналізують описані вище способи побудови дотичної до графіка функції. Диференційований підхід доцільно застосовувати на певних етапах уроку. Під час уведення нового поняття вчитель працює з усім класом. Під час закріплення матеріалу учні можуть перейти до диференційованої самостійної роботи. Особливість такої роботи з використанням комп'ютера полягає в тому, що групи учнів отримують не лише різні завдання, як при традиційному навчанні, а й можуть використовувати різні методи розв'язування задач.

Далі вчитель виводить рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0, f(x_0))$ і для закріплення нового матеріалу розв'язуються задачі наступного типу. На роботу учнів за комп'ютерами вчитель відводить 15 – 20 хвилин.

Задача 1. Написати рівняння дотичної до графіка функції $y = (x - 1)^2 + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$. Для розв'язування задачі будемо використовувати програму GRAN1.

Алгоритм розв'язування задач.

1. Рівняння дотичної до графіка функції у точці $(x_0, f(x_0))$ в загальному випадку має вигляд: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Це рівняння та значення $x_0 = 3$ записуємо у зошиті, залишилося знайти $f(x_0)$ та $f'(x_0)$.

2. Будуємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 4$ за допомогою послуг *Об'єкт\Нова функція* та *Графік\Побудувати*. В разі потреби змінюємо масштаб зображення.

3. Вибираємо послугу *Операції\Дотична*, вказуємо абсцису точки дотику $x_0 = 3$.

4. У вікні, що з'явилося справа на екрані, вибираємо послугу *Дотична*.

5. На екрані з'являється графік дотичної та значення похідної $f'(x_0)$ у точці $x_0 = 3$. Записуємо у зошиті: $f'(x_0) = 4$.

6. Для знаходження $f(x_0)$ скористуємося послугою *Інше\Калькулятор*. Обчислимо значення виразу: $(3 - 1)^2 + 4$. Записуємо у зошиті: $f(x_0) = 8$.

7. Записуємо рівняння дотичної: $y = 8 + 4(x - 3)$.

8. Спрощуємо рівняння, що отримали: $y = 4x - 4 = 4(x - 1)$. Задача розв'язана.

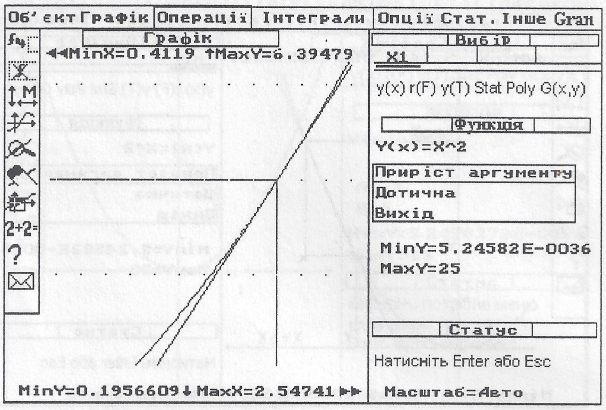
9. Для перевірки можна ввести функцію: $y = 4x - 4$ та побудувати графік дотичної. Він має зливатися з графіком дотичної, який побудував комп'ютер на попередніх кроках.

Тема: ОЗНАКИ ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ

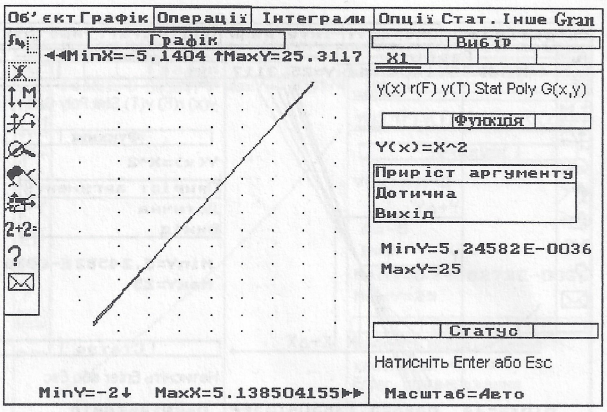
Враховуючи реальні можливості шкільної програми, доцільніше ознаки монотонності ввести, скориставшись лише їх геометричною ілюстрацією. Основну увагу слід звернути на різні способи розв'язування вправ, де використовується сформульована без доведення достатня ознака монотонності.

Геометричну ілюстрацію ознак монотонності зручно провести на прикладах знайомих учням графіків функцій $y = x^2$, $y = x^3$.

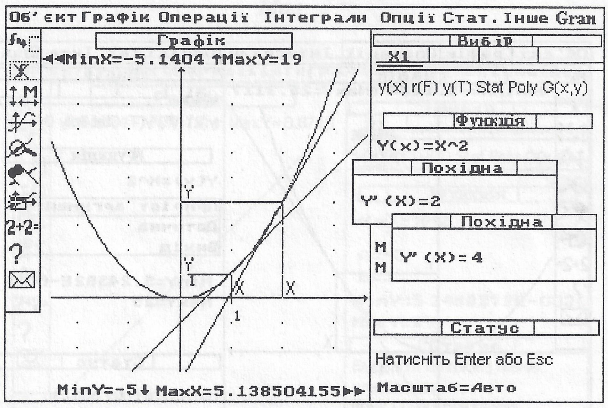
Раніше учні знаходили проміжки монотонності для цих функцій, не користуючись похідною. Скориставшись послугами програми GRAN1, будуємо графіки цих двох функцій і дотичні до графіків функцій у точках: $x = 1$, $x = 2$, $x = -1$, $x = -2$ (мал. 9, 10). Аналізуємо кути, які утворилися при побудові дотичних, та знаки похідних.



Мал. 7



Мал. 8

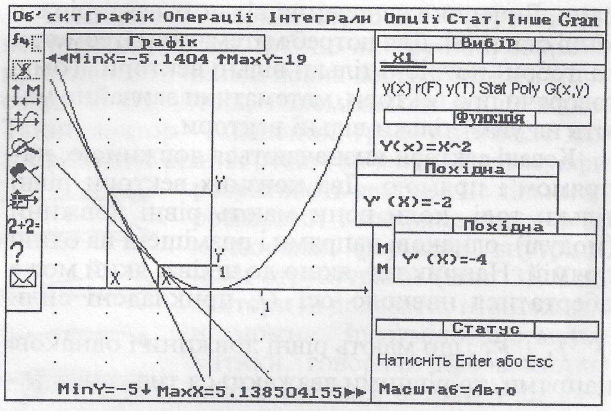


Мал. 9

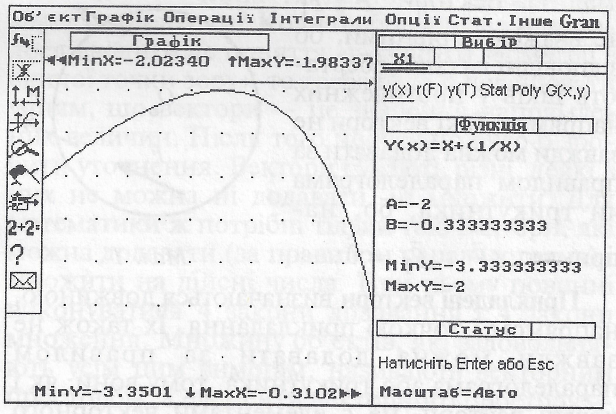
Висновки. Розглянемо графік функції $y = x^2$. На проміжку $(0; +\infty[$, де функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox. Це означає, що похідна даної функції у цих точках додатна. На проміжку $]-\infty; 0)$, де функція спадає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює тупий кут з додатним напрямом осі Ox. Це означає, що похідна даної функції у цих точках від'ємна.

Розглянемо графік функції $y = x^3$. На проміжку $]-\infty; +\infty[$, де функція зростає, дотична до графіка в будь-якій точці утворює гострий кут з додатним напрямом осі Ox. Це означає, що похідна даної функції у цих точках (окрім точки $x = 0$) додатна, тобто функція $y = x^3$ зростає у всій області її визначення. Лише у точці $x = 0$ похідна дорівнює нулю.

Далі звертається увага, що коли функція має похідну, яка дорівнює нулю в кожній точці деякого проміжку, то ця функція стала на цьому проміжку.



Мал. 10



Мал. 11

Це зауваження треба проілюструвати графічно. За допомогою програми GRAN1 будуємо графіки функцій $y = 3$ та $y = -1$ і знаходимо для них похідні у точках $x = 2$; $x = -2$. Учні переконуються, що похідні для функцій, які є сталими, дорівнюють нулю.

Тема: НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ВІДРІЗКУ

Набуття навичок і умінь визначення найбільшого і найменшого значення функції на відрізку має велике значення для розв'язування великої кількості задач практичного змісту. Такі задачі виникають там, де треба з'ясувати, як отримати потрібний результат з найменшою витратою засобів, матеріалу, часу. Вміння розв'язувати такі задачі набуває важливого значення у зв'язку з проблемою підвищення ефективності та якості у багатьох сферах діяльності людини. Універсальним є метод розв'язування таких задач, заснований на використанні похідної, але завдяки сучасним комп'ютерним програмам учням можна запропонувати новий нетрадиційний спосіб знаходження як локальних максимумів і мінімумів функції, так і визначення найбільшого і найменшого значення функції на відрізку (без використання похідної функції).

Графічний метод розв'язування задач з використанням комп'ютерних програм демонструє всі переваги застосування нових інформаційних технологій у навчанні і ознайомлює учнів з одним із сучасних методів дослідження проблем. Учні, які цікавляться математикою або продовжуватимуть навчання в цьому напрямку, повинні чітко уяснити схеми визначення найбільшого і найменшого значення функції на відрізку за допомогою похідної і набути відповідних навичок. Інші учні при розв'язуванні подібних задач можуть використовувати графічний метод без застосування похідної. Це не тільки економить час, а й дає змогу слабкішим учням розв'язувати раніш непосильні для них завдання. Розглянемо приклад розв'язування задачі на цю тему.

Задача 1. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на проміжку $[-2; -\frac{1}{3}]$.

Алгоритм розв'язування задачі.

1. За допомогою послуг *Об'єкт\Нова функція* та *Графік\Побудувати* програми GRAN1 будуємо графік функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2. Після побудови графіка функції автоматично на екрані висвітлюється Min Y, Max Y, тобто найбільше і найменше значення функції на проміжку $[-5, 5]$.

3. Вкажемо далі межі відрізка, на якому слід знайти найбільше і найменше значення функції, за допомогою послуги *Об'єкт\Змінити відрізок*. Встановлюємо $A = -2$, $B = -\frac{1}{3}$ (задати цей відрізок можна було відразу під час введення функції).

4. Тепер значення Min $Y = -3{,}33333333$ дає нам найменше значення функції $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на відрізку $[-2; -\frac{1}{3}]$, а Max $Y = -2$ — найбільше значення даної функції на відрізку $[-2; -\frac{1}{3}]$. Задача розв'язана (мал. 11).

Диференційований підхід доцільно застосовувати на певних етапах уроку. Під час уведення нового поняття вчитель працює з усім класом. При закріпленні матеріалу учні можуть перейти до диференційованої самостійної роботи з використанням комп'ютера, отримуючи не лише різні завдання, як при традиційному навчанні, а й маючи змогу використовувати різні методи розв'язування задач.

Використання НІТ дає змогу отримати одночасний зріз знань учнів за даною темою, забезпечити індивідуальний підхід у навчанні, врахувати психологічні особливості і наявний рівень знань школярів, підвищити наочність навчання і забезпечити справжній інтерес до явищ, що вивчаються.