

ТЕСТИРОВАНИЕ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ОКТАЭДРА

Мотайло А. П.¹, Хомченко А. Н.²

¹*Херсонский национальный технический университет*

²*Черноморский государственный университет им. П. Могилы*

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. В качестве конечного элемента октаэдр (7 узлов интерполяции) широко применяют при решении задач визуализации [1]. Главным преимуществом использования решетки тетраэдрально-октаэдральной структуры в сравнении с тетраэдральной является скорость вычислений. Построение систем узловых координатных (базисных) функций октаэдра (6 узлов), изучение его интерполяционных качеств в сочетании с тетраэдром являются предметом исследования авторов. В частности, в работе [2] установлено, что октаэдр с кусочно-линейными узловыми координатными функциями совместен с линейным тетраэдром и может быть использован при решении задач математической физики с дифференциальным оператором (положительно определенным, симметричным) второго порядка. При этом метод конечных элементов (МКЭ) сходится в среднеквадратичном при расчете характеристик напряженно-деформированного состояния твердого тела. Для проверки теоретических результатов [2] проведем численный эксперимент на примере задачи Буссинеска [3].

МАТЕРИАЛЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Рассмотрим замкнутую область $V = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b, h_0 \leq x_3 \leq h + h_0\}$, являющуюся частью упругого изотропного полупространства, расположенную на расстоянии h_0 от точки приложения нагрузки P , направленной вдоль оси Ox_3 . Методом конечных элементов найдем перемещения u_i в произвольной точке области V как решение краевой задачи для системы уравнений Ламе:

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2$ – оператор Лапласа, ν – коэффициент Пуассона, $\Theta = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3$, с граничными условиями Дирихле

$$u_i = \frac{P}{4\pi G} \cdot \left(\frac{x_i x_3}{r^3} - (1-2\nu) \cdot \frac{x_i}{r(r+x_3)} \right), \quad i = \{1,2\}, \quad u_3 = \frac{P}{4\pi G} \cdot \left(\frac{2 \cdot (1-\nu)}{r} + \frac{x_3^2}{r^3} \right), \quad (2)$$

где G – модуль сдвига, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, (x_1, x_2, x_3) – произвольная точка границы области V .

Разбивая область V на конечные элементы в форме октаэдров и тетраэдров [2], используем линейные функции L_i ($i = \overline{1,4}$) тетраэдра [4] и кусочно-линейные функции октаэдра

$$NL_i = \begin{cases} 1/6(1 + 2|\xi| \pm 3\xi - |\eta| - |\zeta|), i = 1, 3; \\ 1/6(1 + 2|\eta| \pm 3\eta - |\xi| - |\zeta|), i = 2, 4; \\ 1/6(1 + 2|\zeta| \pm 3\zeta - |\xi| - |\eta|), i = 5, 6; \end{cases} \quad (3)$$

где (ξ, η, ζ) – локальные координаты точки $(x_1, x_2, x_3) \in V$.

Для нахождения численного решения \tilde{u}_i данной задачи авторами составлена программа в среде Maple. Результаты численного эксперимента в табл.1, 2 получены для стального куба ($\nu = 0.3$, $G = 8 \cdot 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$) размеров $a = b = h = 1 \text{ м}$, $h_0 = 0,01 \text{ м}$ при точечной нагрузке $P = 10^3 \text{ Н}$.

Таблица 1 – Ошибка решения на тетраэдрально-октаэдральной решетке

Характеристики решетки	Решение МКЭ		
	1 окт., 16 тетр.	6 окт., 136 тетр.	36 окт., 1104 тетр.
$\sqrt{\int_V (\tilde{u}_3 - u_3)^2 dx_1 dx_2 dx_3}$	$2.65 \cdot 10^{-2}$	$9.08 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$
Время вычислений (с)	17	41	69

Таблица 2 – Ошибка решения на тетраэдральной решетке

Характеристики решетки	Решение МКЭ			
	6 тетр.	48 тетр.	384 тетр.	3072 тетр.
$\sqrt{\int_V (\tilde{u}_3 - u_3)^2 dx_1 dx_2 dx_3}$	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$1.5 \cdot 10^{-3}$
Время вычислений (с)	9	12	18	242

ВЫВОДЫ. Проверка теоретических результатов о сходимости МКЭ на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры подтверждается численным экспериментом на примере задачи Буссинеска. При этом точность и скорость полученных результатов остаются высокими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data. – Computer Graphics International Conference "CGI 1998". – Hannover: IEEE Computer Society, 1998. – P. 761–771.
2. Мотайло А.П., Хомченко А.Н. Интерполяция кусочно-линейными функциями на решетках тетраэдрально-октаэдральной структуры. – Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки, 2013. – Вип. 8. – 139 с.
3. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.