

## ПОБУДОВА КУБАТУРНОЇ ФОРМУЛИ ДЛЯ ОКТАЕДРА

<sup>1</sup>Мотайло А.П., <sup>2</sup>Білоусова Т.П.

<sup>1</sup>Херсонська державна морська академія (Україна)

<sup>2</sup>Херсонський національний технічний університет (Україна)

Розрахунки деталей та вузлів механізмів машин є важливою складовою їх проектування та конструювання. Сучасні комп'ютерні технології дозволяють комплексно провести необхідні обчислення геометричних розмірів деталей та вузлів в залежності від низки факторів: умов експлуатації, режимів роботи, обраних матеріалів тощо.

Одним з самих точних методів розрахунку деталей машин на міцність є метод скінченних елементів (МСЕ), який дозволяє визначити напруження в довільній точці плоскої або об'ємної деталі, є універсальним, надійним інструментом для розв'язання задач механіки, аналізу різних технічних систем, конструкцій, механізмів. Чисельне інтегрування є невід'ємною частиною алгоритму застосування МСЕ. Його можна інтерпретувати як апроксимацію підінтегральної функції поліномом, степінь якого визначається кількістю точок інтегрування, якщо використовуються квадратури (кубатури) Гаусса-Лежандра. Інші формули чисельного інтегрування (Ньютона-Котеса, складені формули) в МСЕ застосовують рідше. У випадку, коли об'ємна область є дискретизованою тетрадрально-октадральною решіткою, існує задача побудови кубатурних формул по октаедру. У роботах [1–2] запропоновано формули чисельного інтегрування по об'єму лінійного октаедра з кусково-лінійними базисними функціями для обчислення елементів локальної матриці жорсткості. Вказані формули не є інтерполяційними та отримані в результаті застосування геометричного змісту та властивості адитивності по області інтегрування потрійного інтеграла. Отже, актуальною є задача побудови інтерполяційної кубатурної формули по області лінійного октаедра для обчислення скінченно-елементних матриць (жорсткості, мас, демпфірування). Метою даної роботи є побудова кубатурної формули для лінійного октаедра та визначення алгебраїчного порядку точності кубатури.

Нехай  $\Omega = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 1\} \subset R^3$  – область інтегрування у формі октаедра,  $f(x, y, z)$  – неперервна на  $\Omega$  функція. Для лінійного октаедра з поліноміальними базисними функціями елементи матриці жорсткості  $k = [k_{pq}] = \iiint_{\Omega} B^T D B dx dy dz$ , де

$B^T = \left( \frac{\partial \varphi_r}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_r}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} \right)$  – матриця градієнтів базисних функцій  $\varphi_r = \varphi_r(x, y, z)$ ,  $D$  – матриця

пружності, є поліномами степеня  $2(n-1)$ , де  $n$  – степінь поліномів  $\varphi_r$ . Якщо  $n=2$ , тоді елементи матриці жорсткості скінченного елемента у формі октаедра є алгебраїчними поліномами другого степеня.

Вибір певної кубатурної формули залежить від геометрії області інтегрування та властивостей підінтегральної функції. Якщо область інтегрування є центрально-симетричною у просторі  $R^n$ , тоді кількість вузлів  $2n$  є найменшою можливою, для якої існує кубатурна формула, яка є точною для поліномів третього степеня [3]. Оскільки октаедр наділений центральною симетрією в  $R^3$ , тому існує кубатурна формула з 6 вузлами інтерполяції, яка є точною, якщо  $f(x, y, z) = P_m$ , де  $m \leq 3$ . Відзначимо, що кубатура Гаусса-Лежандра, яка є точною для поліномів третього степеня, існує для  $2^3 = 8$  вузлів інтерполяції у об'ємній області довільної геометричної форми.

Кубатурну формулу по області октаедра будемо шукати у вигляді:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \approx \sum_{i=1}^6 A_i f(x_i, y_i, z_i) = I_R(f), \quad (1)$$

де  $A_i$  – вагові коефіцієнти,  $(x_i, y_i, z_i)$  – вузли інтерполяції  $i = \overline{1, 6}$ .

Розташуємо вузли  $(x_i, y_i, z_i)$  по одному на півдіагоналях октаедра на відстані  $0 < p \leq 1$  від центра багатогранника  $(0, 0, 0)$ . Тоді  $(x_1, y_1, z_1) = (p, 0, 0)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (0, p, 0)$ ,  $(x_3, y_3, z_3) = (-p, 0, 0)$ ,  $(x_4, y_4, z_4) = (0, -p, 0)$ ,  $(x_5, y_5, z_5) = (0, 0, p)$ ,  $(x_6, y_6, z_6) = (0, 0, -p)$ .

Для полінома  $P_3(x, y, z) = \sum_{|\alpha|=0}^3 a_{ijk} x^i y^j z^k$ , де  $a_{ijk}$  – коефіцієнти,  $\alpha = \alpha(i, j, k)$  –

мультиіндекс,  $|\alpha| = i + j + k$ ,  $i, j, k = \overline{1, 3}$ , формула (1) є точною, тобто

$$\iiint_{\Omega} P_3(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^6 A_i P_3(x_i, y_i, z_i). \quad (2)$$

Потрійний інтеграл у лівій частині формули (2) обчислюється як сума повторних інтегралів:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} P_3(x, y, z) dx dy dz + \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} \int_0^{1+x-y} P_3(x, y, z) dx dy dz + \\ &+ \int_{-1}^0 \int_0^0 \int_0^{1+x+y} P_3(x, y, z) dx dy dz + \int_0^1 \int_0^0 \int_0^{1-x+y} P_3(x, y, z) dx dy dz = \frac{4}{3} a_{000} + \frac{2}{15} (a_{200} + a_{020} + a_{002}). \end{aligned} \quad (3)$$

Права частина формули (2) після підстановки координат вузлових точок має вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 A_i P_3(x_i, y_i, z_i) &= A_1 (a_{000} + a_{100} p + a_{200} p^2 + a_{300} p^3) + A_2 (a_{000} + a_{010} p + a_{020} p^2 + a_{030} p^3) + \\ &+ A_3 (a_{000} - a_{100} p + a_{200} p^2 - a_{300} p^3) + A_4 (a_{000} - a_{010} p + a_{020} p^2 - a_{030} p^3) + \\ &+ A_5 (a_{000} + a_{001} p + a_{002} p^2 + a_{003} p^3) + A_6 (a_{000} - a_{001} p + a_{002} p^2 - a_{003} p^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових коефіцієнтах  $a_{ijk}$ , отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 A_i = \frac{4}{3}; \\ (A_i - A_j) p = 0; \\ (A_i + A_j) p^2 = \frac{2}{15}, i = \{1, 2, 5\}, j = \{3, 4, 6\}. \end{cases} \quad (5)$$

Розв'язком системи (5) є значення параметра  $p = \sqrt{0.3}$  та вагових коефіцієнтів  $A_i = \frac{2}{9}$ ,  $i = \overline{1, 6}$ .

Тоді формула (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz &\approx \\ &\approx \frac{2}{9} (f(\sqrt{0.3}, 0, 0) + f(0, \sqrt{0.3}, 0) + f(-\sqrt{0.3}, 0, 0) + f(0, -\sqrt{0.3}, 0) + f(0, 0, \sqrt{0.3}) + f(0, 0, -\sqrt{0.3})). \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (6) є кубатурною по області октаедра, яка містить 6 вузлів інтерполяції та є точною для поліномів  $P_m(x, y, z)$  степеня  $m \leq 3$ .

Оцінимо точність отриманої формули. Будемо вважати, що функція  $f(X) = f(x, y, z)$  належить класу  $C^4(\Omega)$  неперервно-диференційованих до 4 порядку включно на  $\Omega$  функцій. Нехай  $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$  – довільна точка області  $\Omega$ . Запишемо формулу Тейлора для  $f(X)$  в околі точки  $X_0$  із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(X) = \sum_{s=1}^3 \sum_{|\beta|=s} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0)}{\partial X^\beta} (X - X_0)^\beta + \sum_{|\beta|=4} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^\beta} (X - X_0)^\beta, \quad (7)$$

де  $\beta = \beta(i, j, k)$  – мультиіндекс,  $|\beta| = i + j + k$ ,  $i, j, k = \overline{1,3}$ ,  $\beta! = i!j!k!$ ,  $0 < \theta < 1$  – деяке число.

Проінтегруємо залишковий член формули (7) по області  $\Omega$ :

$$R_4(f) = \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=4} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} dX, \quad (8)$$

де  $R_4(f) = \iiint_{\Omega} f(X) dX - I_R(f)$  – залишковий член формули (1),  $dX = dx dy dz$  – елемент об'єму.

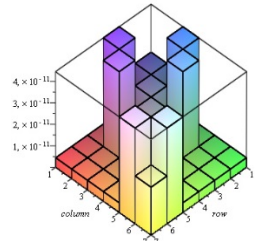
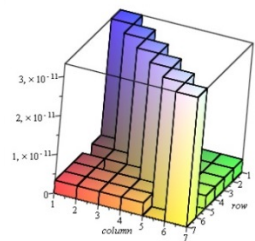
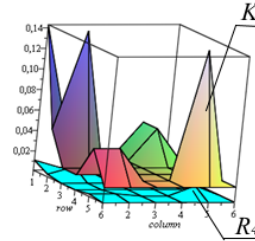
Оцінимо рівність (8), враховуючи, що  $|X - X_0| \leq 2$  для довільних точок  $X, X_0 \in \Omega$ :

$$|R_4(f)| \leq \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=4} \left| \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} (X - X_0)^{\beta} \right| dX \leq \iiint_{\Omega} \sum_{|\beta|=4} \left| \frac{2^{|\beta|}}{\beta!} \frac{\partial^{|\beta|} f(X_0 + \theta(X - X_0))}{\partial X^{\beta}} \right| dX = K.$$

Справедливість формули (6) перевірено при обчисленні елементів матриці жорсткості лінійного октаедра з поліноміальними та тригонометричними базисними функціями [4].

У табл.1 наведено значення похибки  $\Delta = \max_{k_{pq}, p, q=1,6} |R_4(f)|$ , де  $f = k_{pq}$ . Розрахунки виконано у системі комп'ютерної математики Maple. Значення  $K$  відповідає  $X_0 = 0$ .

Таблиця 1. Оцінка точності кубатурної формули (6)

Базиси октаедра	Квадратичний	Трилінійний	Тригонометричний
$\Delta$	$4.44 \cdot 10^{-11}$	$3.23 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
Розподіл похибки $ R_4(f) $ за елементами матриці $k$			

Висновки. У роботі побудовано інтерполяційну кубатурну формулу по області лінійного октаедра з мінімальною кількістю вузлів інтерполяції, яка є точною для поліномів третього степеня. Отримано оцінку залишкового члена кубатурної формули для підінтегральних функцій, які належать класу  $C^4(\Omega)$ . Результати перевірено при обчисленні елементів локальної матриці жорсткості для систем поліноміальних та тригонометричних базисних функцій другого порядку.

#### ЛІТЕРАТУРА

- Grosso R., Greiner G. Hierarchical Meshes for Volume Data. Computer Graphics International 1998: Proceeding of the Conference (Washington, July 22—27, 1998). Washington, 1998. P. 761 – 771.
- Мотайло А. П. О численном решении стационарной задачи теплопроводности методом конечных элементов на решетке тетраэдрально-октаэдральной структуры. Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. Белгород, 2014. №25(196). С.119 – 127.
- Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1967. – 500 с.
- Мотайло А. П., Хомченко А. Н. Порівняльний аналіз базисів октаедра. Новітні наукові досягнення – 2013: матеріали ІХ Міжнар. наук.-практ. конф. Серія: Математика (Софія, 17–25 березня 2013). Софія, 2013. Т. 21. Математика. Фізика. Сучасні інформаційні технології. С. 28 – 33.