# ПРОГНОЗУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕТЕРОГЕННИХ КОМПОЗИТНИХ СИСТЕМ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

**УДК 681.5**

**БУКЕТОВ Андрій Вікторович**
д.т.н., професор, завідувач кафедри технічної механіки, інженерної та комп'ютерної графіки Херсонської державної морської академії.
**Наукові інтереси:** інформаційні технології.

**КРАВЦОВА Людмила Володимирівна**
к.т.н., доцент, завідувач кафедри інформатики Херсонської державної морської академії.
**Наукові інтереси:** інформаційні технології.

**ПІРОГ Алла Петрівна**
аспірант кафедри технічної механіки, інженерної та комп'ютерної графіки Херсонської державної морської академії.
**Наукові інтереси:** інформаційні технології.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На сьогодні досить актуальною є проблема прогнозування властивостей полімерних гетерогенних композитних матеріалів (чи систем) залежно від вмісту у зв'язувачі дисперсного наповнювача. Задачею ставиться моделювання і прогнозування властивостей композитів, виходячи з мінімальної апріорної інформації про систему [1-4]. Іншими словами, ставилось завдання проаналізувати результати дослідження фізико-механічних властивостей композитних матеріалів (КМ) та надалі спрогнозувати показники інших (у нашому випадку теплофізичних) характеристик КМ. На попередньому етапі проведено дослідження фізико-механічних і теплофізичних властивостей КМ. Епоксидні КМ формували на основі олігомера ЕД-20 (100 мас.ч.), який затверджували твердником ПЕПА (10 мас.ч.). Поетапно до зв'язувача додавали наповнювач (частки карбіду кремнію SiC) у кількості від 20 до 120 мас.ч. з кроком 20 мас.ч. Далі затверджували КМ і досліджували їх властивості. У даній роботі було досліджено такі властивості матеріалів:

- властивості структури: вміст гель-фракції (*G*), залишкові напруження ($\sigma_{зал}$);
- фізико-механічні властивості: руйнівне напруження при згинанні ($\sigma_{зг}$), модуль пружності (*E*), ударна в'язкість (*a*);
- теплофізичні властивості: теплостійкість (*T*).

Зазначимо, що досліджувані властивості матеріалів вибрано не спонтанно, а виходячи з наступних положень. Відомо [5], що однією з найважливіших характеристик структури полімерних композитів є вміст гель-фракції у матеріалах. Дана величина виражається у відсотках і характеризує ступінь зшивання КМ. Вміст гель-фракції опосередковано характеризує міцність композитів, яка, у свою чергу, визначає їх фізико-механічні (руйнівне напруження при згинанні, модуль пружності, ударна в'язкість) і теплофізичні (теплостійкість) властивості. Звісно, прямої залежності між даними характеристиками немає (що й підтверджено експериментально), проте в загальному можна вважати, що дані властивості епоксикомпозитів є опосередковано взаємозалежними.

Отже, можна стверджувати, що фізико-механічні і теплофізичні властивості композитів залежать від властивостей структури, які, у нашому випадку, визначаються такими характеристиками як гель-фракція та залишкові напруження. Актуальним на сьогодні є об'єднання залежностей наведених вище властивостей матеріалів (наприклад, від вмісту часток наповнювача у зв'язувачі) у математичну модель з метою прогнозування поведінки КМ під впливом зовнішніх факторів.

### АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

При коротко- чи довготривалому прогнозуванні часто використовують експериментальні методи, до яких відносять методи самоорганізації. Застосування методів самоорганізації передбачає, що усі основні тенденції розвитку процесу відображені у таблиці спостереження. Застосуванню експериментальних методів сприяє також суттєва інерційність процесів. За допомогою експериментальних методів вирішують задачу прогнозування на основі інформації про попередні стани системи. На наступних етапах прогнозують поведінку системи за умови, коли не виникає ніяких принципових (структурних) змін у об'єкті дослідження і зовнішні керуючі фактори змінюються у тих же межах, що й у попередніх станах [1, 3, 6]. У цьому випадку математична модель, отримана на підставі інформації про поведінку об'єкта у попередніх станах, залишається інформативною (або адекватною) упродовж усього інтервалу прогнозування.

**Мета роботи** – використовуючи методи математичного програмування розробити математичну модель для прогнозування властивостей гетерогенних композитних систем, провести експеримент і перевірити адекватність моделі до експериментальних даних.

### ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ

В результаті серії експериментів отримали таблицю залежностей п'яти функцій аргументу ***x***: $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_3 = f_3(x)$, $y_4 = f_4(x)$, $y_5 = f_5(x)$. Необхідно побудувати аналітичну залежність значень останнього рядка таблиці від п'яти попередніх: $f_6 = F(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x))$.

*Таблиця 1 –*

**Залежність властивостей КМ від вмісту наповнювача карбіду кремнію**

| Властивості | Значення аргументу *(x)* | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| $f_1(x) = G$, % | 95,15 | 96,4 | 96,8 | 97,3 | 96,9 | 96,8 | 96 |
| $f_2(x) = \sigma_{зал}$, МПа | 7,2 | 3,3 | 3,8 | 4,1 | 3,8 | 5,3 | 5,2 |
| $f_3(x) = \sigma_{зг}$, МПа | 33,5 | 77,5 | 87 | 90 | 110,2 | 114,5 | 104 |
| $f_4(x) = E$, ГПа | 3,62 | 5,01 | 5,16 | 5,21 | 5,17 | 5,82 | 5,68 |
| $f_5(x) = a$, кДж/м$^2$ | 6,31 | 8,68 | 9,15 | 9,7 | 9,83 | 9,43 | 8,81 |
| $f_6 = T$, К | 359 | 378 | 385 | 387,5 | 394,5 | 401 | 398 |

Слід зауважити, що усі табличні значення функцій $f_1$ - $f_6$ є випадковими величинами, оскільки при реалізації будь-якого реального процесу суттєво впливають зовнішні фактори, тому немає необхідності вимагати співпадання табличних значень функції і значень, які відповідають аналітичній функції $f_6 = F(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x))$.

**Рішення задачі.** Оскільки функції $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $y_3 = f_3(x)$, $y_4 = f_4(x)$, $y_5 = f_5(x)$, $y_6 = f_6(x)$ задано у вигляді таблиці, апроксимуємо кожну з них поліномом 4-го степеня, використовуючи можливості ***MS Excel 2003***, а саме, побудуємо графіки кожної з функцій. Для цього у вкладці «Добавить линию тренда» виберемо тип «Полиномиальный» 4-го степеня, а у вкладці «Параметры» відмітимо «Показать уравнение» (рис. 1, рис. 2).

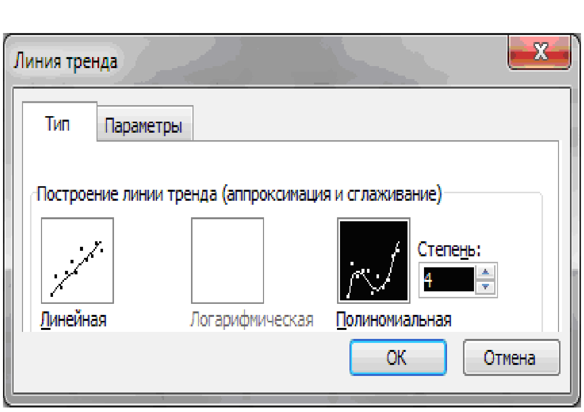



***Рисунок 1 – Вибір типу лінії тренду***

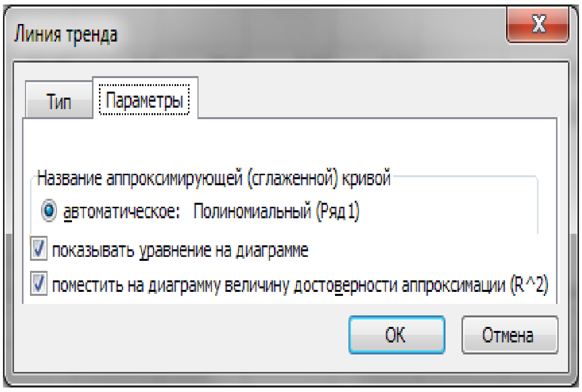



***Рисунок 2 – Вибір параметрів лінії тренду***

Таким чином, для кожної функції отримаємо графіки залежностей $y_n = f_n(x)$. Слід зазначити, що апроксимацію заданої у вигляді таблиці функції в MS Excel проводили методом найменших квадратів, тобто будували аналітичну функцію $\overline{y} = \varphi(x, a_0, a_1,,, a_n)$, яка найкращим чином описує табличну. У даному випадку необхідно встановити параметри залежності $a_0, a_1,,, a_n$. При цьому критерій оптимальності параметрів має вигляд:

$$\sigma(a_0, a_1 ... a_n) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{y_i} - y_i)^2 \to \min \qquad (1)$$

де $\overline{y}$ – розрахункове значення факторного признаку $\boldsymbol{Y}$, $y_i$ – табличне значення для відповідного $x_i$, $\sum_{i=1}^{n} (\overline{y_i} - y_i)^2$ – сума квадратів відхилень розрахункових значень від табличних.

Аналізуючи графіки апроксимуючих функцій та показники достовірності можна констатувати, що отримані аналітичні функції є достатньо точними. Однак спроба отримання аналітичної функції $\boldsymbol{f_6}$ у вигляді суперпозиції функцій $\boldsymbol{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)}$ не забезпечила необхідних результатів. У цьому випадку виявили, що достовірність апроксимації недостатньо висока.

Для вирішення поставленої задачі пропонується метод, що ґрунтується на моделях математичного лінійного програмування [7-9]. Для отримання аналітичної залежності представимо шукану функцію $\boldsymbol{f_6}$ як лінійну комбінацію значень функцій $\boldsymbol{(f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x))}$, заданих у табличній формі:

$$f_6 = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x) + c_4 \cdot f_4(x) + c_5 \cdot f_5(x) \qquad (2)$$

Коефіцієнти c1, c2, c3, c4, c5 необхідно визначити. У якості функцій f1$\boldsymbol{(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)}$ будемо використовувати відомі табличні значення:

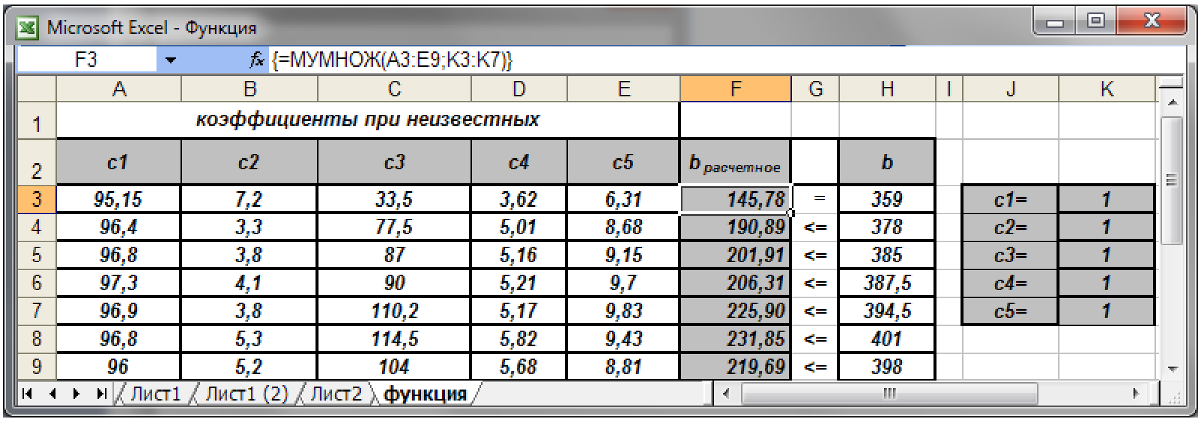
$$\begin{cases} 95.15c_1 + 7.2c_2 + 33.5c_3 + 3.62c_4 + 6.31c_5 = 359 \\ 96.4c_1 + 3.3c_2 + 77.5c_3 + 5.01c_4 + 8.68c_5 \le 378 \\ 96.8c_1 + 3.8c_2 + 87c_3 + 5.16c_4 + 9.15c_5 \le 385 \\ 97.3c_1 + 4.1c_2 + 90c_3 + 5.21c_4 + 9.83c_5 \le 387.5 \\ 96.9c_1 + 3.8c_2 + 110.2c_3 + 5.17c_4 + 9.83c_5 \le 394.5 \\ 96.8c_1 + 5.3c_2 + 114.5c_3 + 5.82c_4 + 9.43c_5 \le 401 \\ 96c_1 + 5.2c_2 + 104c_3 + 5.68c_4 + 8.81c_5 \le 398 \end{cases} \qquad (3)$$

Отримана система має п'ять невідомих, які необхідно визначити, і сім співвідношень. Першу рівність з наведеного спектру співвідношень будемо використовувати у якості цільової функції, а інші нерівності – у якості системи обмежень. Рішення системи (3) знайдемо за допомогою модуля «Поиск решения» електронних таблиць MS Excel. У системі (3) можна побачити транспоновану матрицю коефіцієнтів таблиці 1. Внесемо коефіцієнти системи в діапазон (A3:E9), а елементи правої частини системи (3) – у діапазон (H3:H9) (рис. 3). Шукані значення невідомих (J3:J7) приймемо рівними 1 («опорний план») (діапазон K3:K7). У процесі реалізації рішення у модулі «Поиск решения» ці значення будуть змінені.


| | A | B | C | D | E | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | коэффициенты при неизвестных | | | | | | | | |
| 2 | c1 | c2 | c3 | c4 | c5 | b | | | |
| 3 | 95,15 | 7,2 | 33,5 | 3,62 | 6,31 | 359 | | c1= | 1 |
| 4 | 96,4 | 3,3 | 77,5 | 5,01 | 8,68 | 378 | | c2= | 1 |
| 5 | 96,8 | 3,8 | 87 | 5,16 | 9,15 | 385 | | c3= | 1 |
| 6 | 97,3 | 4,1 | 90 | 5,21 | 9,7 | 387,5 | | c4= | 1 |
| 7 | 96,9 | 3,8 | 110,2 | 5,17 | 9,83 | 394,5 | | c5= | 1 |
| 8 | 96,8 | 5,3 | 114,5 | 5,82 | 9,43 | 401 | | | |
| 9 | 96 | 5,2 | 104 | 5,68 | 8,81 | 398 | | | |

***Рисунок 3 – Матриця вихідних даних***

У стовпці F (діапазон F3:F9) обчислимо значення лівої частини системи (5) при $c1 = c2 = \ldots = c5 = 1$ (значення опорного плану): множення матриці A3:E9 на стовбець K3:K7 за допомогою вбудованої математичної функції МУМНОЖ. В результаті отримаємо наступну таблицю (рис. 4):




| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | коэффициенты при неизвестных | | | | | | | | | | |
| 2 | c1 | c2 | c3 | c4 | c5 | b расчетное | | b | | | |
| 3 | 95,15 | 7,2 | 33,5 | 3,62 | 6,31 | 145,78 | = | 359 | | c1= | 1 |
| 4 | 96,4 | 3,3 | 77,5 | 5,01 | 8,68 | 190,89 | <= | 378 | | c2= | 1 |
| 5 | 96,8 | 3,8 | 87 | 5,16 | 9,15 | 201,91 | <= | 385 | | c3= | 1 |
| 6 | 97,3 | 4,1 | 90 | 5,21 | 9,7 | 206,31 | <= | 387,5 | | c4= | 1 |
| 7 | 96,9 | 3,8 | 110,2 | 5,17 | 9,83 | 225,90 | <= | 394,5 | | c5= | 1 |
| 8 | 96,8 | 5,3 | 114,5 | 5,82 | 9,43 | 231,85 | <= | 401 | | | |
| 9 | 96 | 5,2 | 104 | 5,68 | 8,81 | 219,69 | <= | 398 | | | |

***Рисунок 4 – Обчислення значень правої частини системи***

Наступним етапом було заповнення модуля (Сервис /Поиск решения) (рис. 5).

Після натискання кнопки «выполнить» отримали оптимальне значення параметрів системи, що має вигляд: $c_1=3{,}3134$, $c_2=2{,}7236$, $c_3=0{,}4523$, $c_4=1{,}5575$, $c_5=0{,}5276$. Тоді функціональна залежність (1) виглядає наступним чином:

$$f_6 = 3{,}3134 f_1(x) + 2{,}7236 f_2(x) + \\ +0{,}4523 f_3 + 1{,}5575 f_4(x) + 0{,}5276 f_5(x) \quad (4)$$

Надалі для значень аргументу (табл. 1) 0, 20, 40, 60, 80, 100, 120 побудуємо графіки табличної і аналітичної залежності (рис. 6). Як бачимо, аналітична функція (4) дійсно оптимально відтворює функцію $f_6$, задану табл. 1.

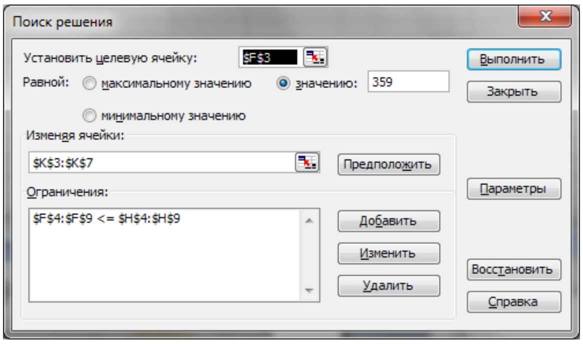
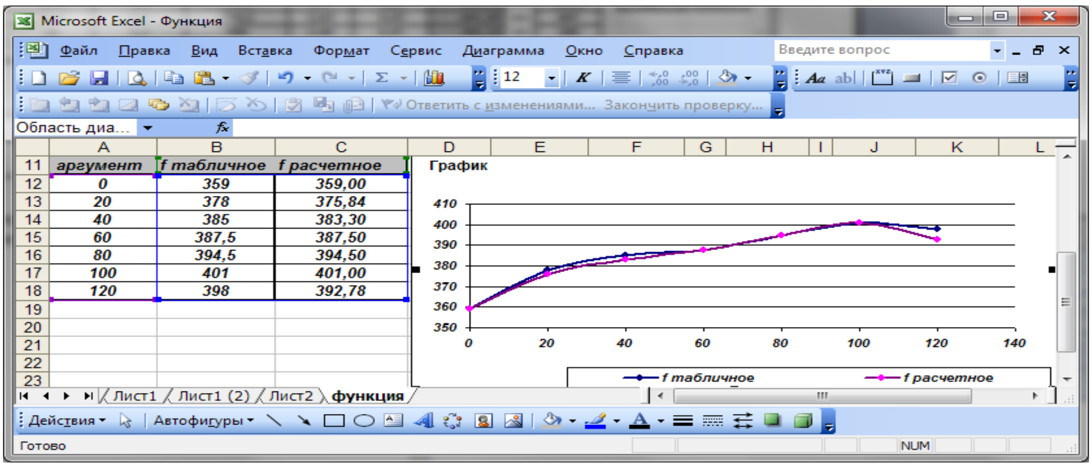



***Рисунок 5 – Заповнення модуля «Поиск решения»***




| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| 11 | аргумент | f табличное | f расчетное |
| 12 | 0 | 359 | 359,00 |
| 13 | 20 | 378 | 375,84 |
| 14 | 40 | 385 | 383,30 |
| 15 | 60 | 387,5 | 387,50 |
| 16 | 80 | 394,5 | 394,50 |
| 17 | 100 | 401 | 401,00 |
| 18 | 120 | 398 | 392,78 |

***Рисунок 6 – Графіки табличної та розрахункової залежностей***

**ВИСНОВКИ**

В роботі з використанням методів математичного програмування розроблено математичну модель для прогнозування властивостей гетерогенних композитних систем. На попередньому етапі для отримання апріорної інформації при досліджувану систему вибрано її основні властивості, які різнобічно характеризують об'єкт. Зазначимо, що досліджувані властивості є опосередковано взаємопов'язаними і містять інформацію про структуру системи, її фізико-механічні та теплофізичні властивості. На наступному етапі проведено серію експериментів і з використанням програмного середовища MS Excel 2003 побудовано математичну залежність властивості системи у вигляді функції від інших відомих характеристик. У майбутньому авторами заплановано розробити математичну модель, яка дозволить прогнозувати властивості матеріалів з тою чи іншою вірогідністю.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Томашевський В.М. Моделювання систем /В.М. Томашевський. – К.: Вид-во "BHV", 2005. – 352 с.
2. Акаике Х. Развитие статистических методов. – В кн.: Современные методы идентификации систем. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
3. Букетов А.В. Ідентифікація і моделювання технологічних об'єктів та систем: Посібник /А.В.Букетов. – Тернопіль: СМП «Тайп», 2009. – 260 с.
4. Копп В.Я. Моделирование автоматизированных линий /В.Я. Копп, Ю.Е. Обжерин, О.И. Песчанский. – Севастополь: СевГТУ, 2006. – 240 с.
5. Стухляк П.Д. Епоксикомпозитні матеріали, модифіковані ультрафіолетовим опроміненням /П.Д. Стухляк, А.В. Букетов. – Тернопіль: Збруч, 2009. – 237 с.
6. Томашевський В.М. Вирішення практичних завдань методами комп'ютерного моделювання /В.М. Томашевський. О.Г. Данова, О.О. Жолдаков. – К.: Корнійчук, 2001. – 267 с.
7. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач /К.Н. Лунгу. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 128 с.
8. Грешилов А.А. Прикладные задачи математического программирования: Учебное пособие /А.А. Грешилов. – 2-е изд. – М.: Логос, 2006. – 288 с.
9. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие /В.Г. Карманов. – 5-е изд., стереотип. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.