

Херсонская государственная морская академия

С. С. Голощапов, А. К. Колебанов

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ  
ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ**

Учебное пособие

Херсон  
ХГМА  
2020

УДК 621.3:656.612(075.8)

Г 60

Рецензенты:

*В. В. Марасанов* – доктор технических наук, профессор;

*В. М. Рябенький* – доктор технических наук, профессор;

*И. В. Богомолова* – кандидат педагогических наук

*Рекомендовано Ученым советом  
Херсонской государственной морской академии  
(протокол № 5 от 05.12.2018)*

**Голощاپов С. С.**

Г 60 Теоретические основы электротехники: учебное пособие / С. С. Голощاپов, А. К. Колебанов. – Херсон : ХГМА, 2020. – 152 с.

ISBN 978-966-2245-54-7

Учебное пособие полезно судовым электромеханикам и электрикам, слушателям курсов подготовки судовых электриков и курсов доподготовки судовых вахтенных механиков для получения сертификатов 2-х и старших механиков в морских тренажерных центрах.

В учебном пособии излагаются основы электротехники для судовых электромехаников таким образом, чтобы полученные знания могли быть использованы для обеспечения наиболее эффективной, экономически выгодной и безопасной эксплуатации судового электрооборудования. Излагаемый материал подобран в соответствии с Кодексом подготовки и дипломирования моряков и несения вахты (Раздел А-III/6, А-III/7) и IMO MODEL COURSE № 7.08 офицер-электротехник.

УДК 621.3:656.612(075.8)

ISBN 978-966-2245-54-7

© Голощاپов С. С.,  
Колебанов А. К., 2020  
© ХГМА, 2020

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель курса «Теоретические основы электротехники» состоит в изложении основных вопросов основ электротехники для судовых электромехаников таким образом, чтобы полученные знания могли быть использованы для обеспечения наиболее эффективной, экономически выгодной и безопасной эксплуатации судового электрооборудования (СЭО). Излагаемый материал подобран в соответствии с Кодексом подготовки и дипломирования моряков и несения вахты (Раздел А-III/6, А-III/7) и IMO MODEL COURSE № 7.08 офицер-электротехник.

Электротехника – область науки и техники, использующая электрические и магнитные явления для практических целей жизнедеятельности человека. Большое значение **электрической энергии** в жизни современного общества объясняется рядом её преимуществ перед другими видами энергии.

Электрическая энергия – это энергия электромагнитного поля, являющегося видом материи. Поле имеет две составляющие – электрическое и магнитное поле.

Передача, генерирование и потребление электрической энергии возможны лишь при наличии электрического и магнитного полей, т.е. существовании электромагнитного поля. Примером могут служить линии электропередачи. При беспроводной передаче движение энергии также связано с существованием электромагнитного поля в пространстве между передающей и приемной антеннами.

В науке об электричестве связь электрических и магнитных явлений была установлена в двадцатых годах IX века, когда Ампер и Эрстед доказали, что электрический ток сопровождается возникновением магнитного поля; окончательно связь электрического и магнитного полей была подтверждена Фарадеем, открывшим явление электромагнитной индукции (1831 г.).

Электротехника, зародившаяся в тридцатых годах IX века, вначале развивались как техника постоянного тока.

Только после создания М. О. Доливо-Добровольским системы трехфазного тока и трехфазного двигателя переменный ток начал вытеснять постоянный. Передача электрической энергии стала осуществляться также трехфазным током.

Теория электромагнитного поля в законченной математической форме была создана Максвеллом в 1873 г. Подтвержденная многочисленными опытами ряда ученых, она окончательно была принята в начале прошлого века.

Введенное Максвеллом представление об электромагнитных волнах, экспериментально подтвержденное работами Герца, позволило А. С. Попову в

1895 г. осуществить передачу сигнала без проводов, что послужило началом новой области электротехники – радиотехники.

Электротехника и ее теоретические основы непрерывно развиваются. Совершенствуются электронные, ионные и полупроводниковые приборы и аппараты, с помощью которых осуществляют прямые и обратные преобразования переменного тока в постоянный, усиление напряжения и мощности, и создают сверхбыстродействующие компьютеры. Увеличивается дальность и возможности проводной связи, радиотехники и телевидения, развивается автоматика, в энергетике осуществляется переход к большим напряжениям (1500 кВ и выше) и мощности генераторов (120000 кВт и выше), разрабатываются и испытываются магнитогидродинамические прямые преобразователи тепловой энергии в электрическую и т.д.

Главное преимущество **электрической энергии** – **универсальность**, это способность электрической энергии легко преобразовываться в другие виды энергии.

Второе преимущество **электрической энергии** – **возможность передачи её на большие расстояния** с незначительными потерями и дальнейшее распределение между различными потребителями.

На современных судах электрическая энергия преобразуется в следующие виды энергии.

1. В **механическую энергию** происходит преобразование электрической энергии **во всех видах приводных электрических двигателей** судовых технических средств: якорно-швартовные механизмы, подъемно-транспортные механизмы, компрессоры, вентиляторы, насосы, сепараторы.

2. В **тепловую энергию** происходит преобразование электрической энергии **в различных нагревателях**: резистивные нагреватели, калориферы, кондиционеры, инфракрасные лампы (применяют для просушивания электрооборудования и создания комфортных условий для людей).

3. В **энергию света** происходит преобразование электрической энергии **в различных осветительных приборах**: светильники бытовых помещений, бортовые и сигнальные огни, прожекторы и т.д.

4. В **химическую энергию** и обратно происходит преобразование электрической энергии **в аккумуляторных батареях (АКБ)**: при зарядке АКБ происходит преобразование электрической энергии в химическую энергию, а при разрядке АКБ преобразование химической энергии в электрическую.

Современная база флота все время совершенствуется. Суда оснащаются современными судовыми электроэнергетическими системами (СЭС) производства и распределения электроэнергии, а также новейшими приемниками электрической энергии, обеспечивающими безопасность



мореплавания и выполнение основного назначения судна по перевозке грузов. Все это в свою очередь требует от электромехаников и электриков высокой квалификации, что невозможно без глубоких знаний теоретических основ электротехники (ТОЭ).

Настоящее пособие создано на основе лекций по ТОЭ, которые читались авторами в Херсонской государственной морской академии. Оно состоит из шести разделов: раздел 1 – цепи постоянного тока; раздел 2 – цепи однофазного синусоидального тока; раздел 3 – трехфазные цепи; раздел 4 – нелинейные цепи, раздел 5 – магнитные цепи; раздел 6 – переходные процессы в электрических цепях. Материал представлен в виде учебника. Это вызвало определённые трудности, так как в объёме пособия пришлось помещать громоздкий материал и излагать его доступно и кратко. Основной акцент делается на физическую сущность электрических и магнитных явлений.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое электротехника?
2. Возможно ли существование электрической энергии без электромагнитного поля?
3. Когда зародилась электротехника?
4. Каким современным наукам послужила основой электротехника?
5. Назовите основное преимущество электрической энергии.

## 1. ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 1.1 Элементы электрической цепи

#### Понятие электрической цепи

Для возникновения электрического тока необходимо наличие электрической цепи. **Электрическая цепь** – это совокупность соединённых между собой элементов цепи. К элементам цепи относятся: источники электрической энергии (активные элементы), приёмники электрической энергии (пассивные элементы), соединительные провода и коммутирующая аппаратура. Графическое изображение электрической цепи называется **схемой** [1]. На схемах элементы цепи изображают условными графическими обозначениями. Для того чтобы упростить изучение физических процессов, протекающих в электрической цепи, вводят понятие схема замещения цепи. **Схема замещения** цепи – это идеализированная цепь, состоящая из идеальных элементов.

Например, рассмотрим источник электрической энергии постоянного тока, его условно графическое обозначение представляют в виде двух идеальных элементов (рис.1.1).

**Первый элемент** – идеальная электродвижущая сила (э.д.с.), она не имеет сопротивления и направлена от минуса к плюсу внутри источника электрической энергии.

**Э.д.с.** характеризует способность электрического поля **перемещать электрические заряды внутри источника** электрической энергии и сообщать движение электрическим зарядам во внешней цепи, то есть создавать в ней электрический ток. Э.д.с. определяется работой, затраченной на перемещение единицы положительного заряда внутри источника. В различных видах источников электрической энергии электрическое поле создаётся неподвижными зарядами, такое поле называют **электростатическим**. Кроме электростатических полей неподвижных зарядов, существуют другие электрические поля, их называют **сторонними**. Такие поля появляются на границе раздела металл – электролит, например в АКБ, или при относительном перемещении проводника и магнитного поля, в генераторах электрической энергии. Под **действием стороннего электрического поля** в источнике происходит **перемещение** положительных зарядов в одну сторону, а отрицательных в другую – противоположную. В случае, если источник не подключен к внешней цепи, создаётся встречное **электростатическое поле**. После **выравнивания напряжённостей** электростатического поля и стороннего поля **перемещение** электрических зарядов внутри источника электрической энергии **прекращается** [2].

**Второй элемент** – это **внутреннее сопротивление** источника электрической энергии, обозначается  $R_0$  (рис.1.1).

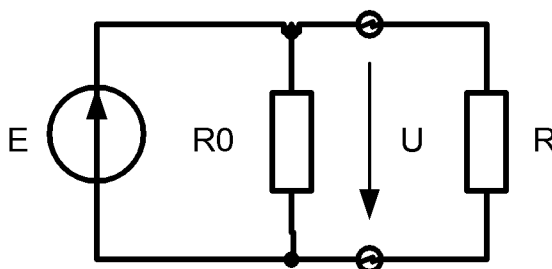


Рис. 1.1 Источник э.д.с. –  $E$ , с внутренним сопротивлением  $R_0$  и схема замещения цепи, состоящая из последовательно соединенного источника электрической энергии и пассивного приёмника  $R$

К схеме замещения относятся следующие понятия:

1. **Ветвь** – участок электрической цепи с **последовательным соединением любого количества** пассивных и активных элементов.

2. **Узел** – место соединения **минимум трёх** ветвей.

3. **Контуром** называют **замкнутый путь**, проходящий через несколько ветвей и узлов разветвлённой электрической цепи.

Рассмотрим простейшую схему (рис. 1.2) подключения двух приёмников электрической энергии  $R_1$ ,  $R_2$  к электрической энергии  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_0$ . В этой схеме замещения можно выделить: **три контура** ( $E, R_1, R_0$ ;  $E, R_2, R_0$ ;  $R_1, R_2$ ); два узла; три ветви ( $E, R_0, R_1$ ;  $R_1, R_2$ ;  $E, R_0, R_2$ ).

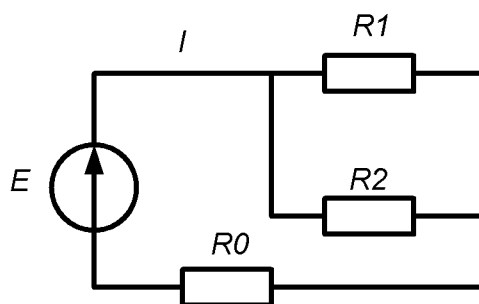


Рис. 1.2 Источник э.д.с. –  $E$  с внутренним сопротивлением  $R_0$  подключен к приёмникам электрической энергии  $R_1, R_2$ . Ток-  $I$ .

### Контрольные вопросы

1. Что такое электрическая цепь?
2. Что такое схема замещения цепи?
3. Что такое источник э.д.с.?
4. Назовите составляющие реального источника эл. энергии.
5. Дать определение узлу, ветви, контуру.

## 1.2 Электрический ток, напряжение, сопротивление

Под действием электрического поля в проводящей среде происходит движение электрических зарядов. Движение электрических зарядов и представляет собой электрический ток. **Электрический ток** осуществляется движением **электронов**, например, **в металлах**, или движением **ионов** обоого знака, как, например, в растворах (**в электролитах** аккумуляторных батарей). В металлах электроны слабо связанные со своими атомными ядрами, легко выходят из орбит и под действием электрического поля перемещаются. Движение электронов в металлах происходит от более низкого потенциала (минуса) к более высокому потенциалу (плюсу) то есть противоположно направлению электрического поля.

В электролитах положительные ионы движутся в направлении поля от более высокого потенциала (плюса) к более низкому потенциалу (минусу), отрицательные ионы – в противоположную сторону. В местах контакта электролита с металлическими электродами ионы отдают электродам свой заряд. Заряды отрицательных ионов, то есть электроны, продолжают движение в металле, заряды положительных ионов компенсируются электронами, поступающими в электролит из металлических электродов.

Величина электрического тока определяется **суммарным количеством** положительных и отрицательных **зарядов**, протекающих через поперечное сечение проводника в единицу времени. Если через поперечное сечение проводника в равные промежутки времени протекают равные количества зарядов и направление их движения не изменяется, то такой ток называется **постоянным**: а если направление их движения и количество изменяются, ток называется **переменным**. Электрический ток является **алгебраической величиной**, то есть может иметь положительный или отрицательный знак. Для цепей постоянного тока за **положительное** направление тока во внешней цепи принимают направление движения положительного заряда, то есть **от плюса источника электрической энергии к минусу**. В цепях постоянного тока с одним источником электрической энергии направление тока во внешней цепи совпадает с направлением источника э.д.с. (рис.1.2.).

**Напряжение** – это работа, которая затрачивается электрическим полем при перемещении единицы положительного заряда между двумя точками электрической цепи. В теории электротехники применяют вспомогательное понятие: **потенциал** – это работа, которую совершает электрическое поле при перемещении единицы положительного заряда из данной точки цепи в точку, потенциал которой принят равным нулю (как правило, это точка, соединённая с землёй). Разность потенциалов двух точек электрической цепи представляет

собой **электрическое напряжение**  $U$  между двумя этими точками. Необходимо отметить, что понятие напряжение имеет смысл только для двух точек цепи, например: между выводами различных приёмников электрической энергии; между проводом и землёй; и т.д. Электрический потенциал и напряжение **измеряются в вольтах**. Если источник не соединён с внешней цепью, тогда **вольтметр**, подключенный к зажимам источника, **покажет напряжение, равное электродвижущей силе**  $E$ . При подключении источника к внешней нагрузке с сопротивлением  $R$  (рис.1.1) образуется замкнутая электрическая цепь и в ней возникает электрический ток. В этом случае **напряжение на зажимах источника будет меньше его э.д.с.**, так как источник обладает внутренним сопротивлением  $R_0$ . Ток  $I$  создаёт во внешней цепи напряжение  $U = I \cdot R$ , которое меньше э.д.с. **на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении**  $R_0$ ,

$$E - I \cdot R = I \cdot R_0 \quad (1.1)$$

Отсюда получается соотношение:

$$I = \frac{E}{(R + R_0)}, \quad (1.2)$$

которое представляет собой закон Ома или второй закон Кирхгофа для неразветвленной цепи. Как следует из (1.1), напряжение  $U$  на зажимах цепи (рис.1.1) определяется отношением (1.3) и эту зависимость называют **внешней вольтамперной характеристикой** нагруженного источника электрической энергии, если эта зависимость линейные цепи и элементы этих цепей называют **линейными**, если нелинейная, их называют **нелинейными**.

$$U = E - I \cdot R_0 \quad (1.3)$$

При изменении величины сопротивления нагрузки  $R$  ток  $I$  и напряжение  $U$  на зажимах цепи (рис.1.1) будут также изменяться.

В зависимости от значений  $R$  и  $R_0$  различают четыре режима работы источника электрической энергии [1]:

1. **Номинальный режим** соответствует режиму работы источников и приёмников электрической энергии при значениях токов и напряжений, на которые они рассчитаны заводами-изготовителями. Номинальные значения токов, напряжений и мощностей указываются в каталогах, паспортах и на корпусах всех видов электрооборудования.

2. *Режим холостого хода* соответствует отсутствию тока в приемнике и осуществляется отключением его источника электрической энергии. Напряжение источника электрической энергии  $U_{xx}$  при этом режиме равно

$$\text{э.д.с.} - E. U_{xx} = E$$

3. *Режим короткого замыкания* возникает в случае, когда сопротивление приемника  $R$  равно нулю. При этом напряжение на зажимах источника  $U$  также равно нулю, а ток через источник достигает максимального значения, так как он ограничен только внутренним сопротивлением  $R_0$

$$I_{кз} = \frac{E}{R_0}$$

4. *Согласованный режим* соответствует равенству величин сопротивления нагрузки  $R$  и внутреннего сопротивления источника электрической энергии  $R_0$ . При этом режиме источник электрической энергии отдает приёмнику максимальную мощность, а его коэффициент полезного действия (к.п.д.) достигает только 50% и растёт с увеличением сопротивления нагрузки.

Электроны при направленном движении по проводникам электрического тока сталкиваются с атомами, колеблющимися в узлах кристаллической решетки металлов, то есть проводник оказывает **сопротивление** электрическому току. У всех **металлов сопротивление с ростом температуры** окружающей среды **увеличивается** [3], за счёт увеличения амплитуды колебаний атомов. Это обстоятельство необходимо учитывать при эксплуатации судового электрооборудования, так как при его работе происходит повышение температуры. У **полупроводников**, наоборот, **сопротивление с ростом температуры уменьшается**, а, следовательно, увеличиваются токи полупроводниковых приборов, что может привести к повреждению этих приборов. Для металлов зависимость напряжения от тока определяется законом Ома:

$$I = U / R,$$

где  $R$  – сопротивление.

Для протяжённых проводников постоянного сечения сопротивление пропорционально **длине** –  $\ell$  и обратно пропорционально **площади поперечного сечения** проводника –  $S$ :

$$R = \frac{\rho \cdot \ell}{S}$$

Коэффициент пропорциональности  $\rho$  называется **удельным электрическим сопротивлением** материала. Он не зависит от геометрических размеров проводника, а только от физических свойств материала и температуры. Электрическое сопротивление измеряется в Омах.

### Контрольные вопросы

1. Что представляет собой электрический ток?
2. Что такое постоянный и переменный ток?
3. Дать определение понятию потенциала и напряжения.
4. Что такое внешняя характеристика источника?
5. Дать определение четырем режимам работы источника эл. энергии.
6. В каких единицах измеряется ток, напряжение, сопротивление?

### 1.3 Анализ простых цепей постоянного тока

Простые цепи – это цепи с последовательным, параллельным или смешанным соединением элементов.

**Последовательное соединение** элементов – это соединение, при котором через все элементы цепи протекает **один и тот же ток** (рис. 1.3).

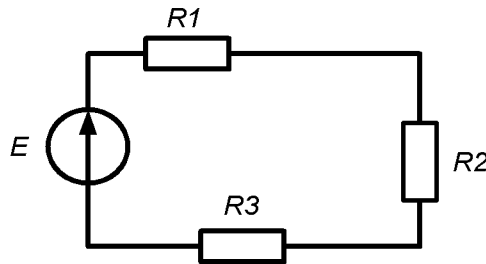


Рис. 1.3 Последовательное соединение трёх пассивных элементов цепи:  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и источника электрической энергии с э.д.с. –  $E$

Элементы  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  для упрощения расчетов заменим на эквивалентное сопротивление  $R_{ЭК}$  – условие эквивалентности выражается в том, что после замены  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  на  $R_{ЭК}$  ток и напряжение в данной цепи не изменяются по величине и направлению (рис.1.4.).

Согласно **второму закону Кирхгофа**: алгебраическая сумма напряжений вдоль контура равна алгебраической сумме э.д.с. вдоль этого же контура, для данной цепи соответствует следующая запись

$$E = U_1 + U_2 + U_3 \quad (1.4)$$

где,  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  соответственно падения напряжения на пассивных элементах.

Или

$$I \cdot R_{ЭК} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

В соответствии с условием эквивалентности  $I \cdot R_{ЭК} = E$ , а следовательно

$$R_{ЭК} = R_1 + R_2 + R_3$$

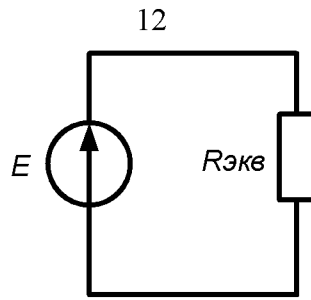


Рис.1.4 Замена  $R_1, R_2, R_3$  на  $R_{ЭК}$

Таким образом, эквивалентное сопротивление при последовательном соединении пассивных элементов равно сумме сопротивлений всех элементов.

**Параллельное соединение** элементов – это соединение, при котором ко всем элементам электрической цепи приложено одинаковое напряжение, то есть они присоединены к одной паре узлов (рис.1.5). Ток в каждой ветви определяется напряжением между узлами и сопротивлением каждой ветви.

$$I = \frac{E}{R} = E \cdot g \tag{1.5}$$

где  $g$  – проводимость ветви, величина обратная сопротивлению

$$g = \frac{1}{R}.$$

Для определения эквивалентного сопротивления цепи при параллельном соединении применим первый закон Кирхгофа, который формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма токов в узле равна нулю*, при этом за положительные принимают токи, направленные к узлу, а за отрицательные принимают токи, выходящие из узла.

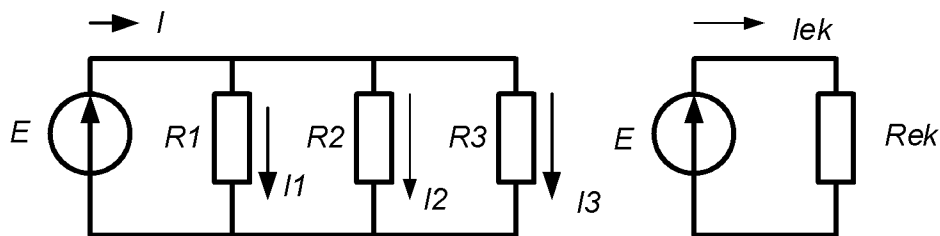


Рис. 1.5 Параллельное соединение элементов и их эквивалентное сопротивление

Согласно первому закону Кирхгофа ток в неразветвленной части цепи определяется суммой токов в ветвях:



$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (1.6)$$

Условие эквивалентности выполняется, если ток  $I$  в неразветвленной части цепи (рис. 1.5) будет равен эквивалентному току  $I_{\text{эkv}}$ .

$$I = I_{\text{эkv}}$$

В уравнении (1.6) запишем токи согласно (1.5) и получим следующее выражение:

$$Eg_{\text{эkv}} = Eg_1 + Eg_2 + Eg_3$$

Разделив полученное выражение на  $E$ , получим значение эквивалентной проводимости для рассматриваемой цепи (рис. 1.5):

$$g_{\text{эkv}} = g_1 + g_2 + g_3,$$

или

$$\frac{1}{R_{\text{эkv}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Откуда следует, что в случае параллельного соединения двух элементов их эквивалентное сопротивление определится как

$$R_{\text{эkv}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.7)$$

В случае параллельного соединения двух пассивных элементов их эквивалентное сопротивление будет меньше меньшего, а токи в параллельных ветвях обратно пропорциональны их сопротивлениям. Зная ток  $I$  в неразветвленной части цепи легко найти токи  $I_1$  и  $I_2$  в параллельных ветвях (рис.1.6.).

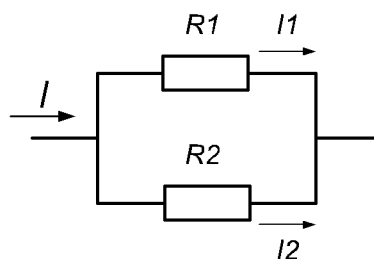


Рис. 1.6 Параллельное соединение двух пассивных элементов  $R_1$  и  $R_2$

Если к элементам  $R_1$  и  $R_2$  приложено напряжение  $U$ , тогда, согласно закону Ома, выразив  $R_1$  и  $R_2$  согласно (1.7) через  $R_{экв}$  получим:

$$U = I \cdot R_{экв} = \frac{I \cdot (R_1 \cdot R_2)}{(R_1 + R_2)}.$$

Определим  $I_1$  и  $I_2$ :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I \cdot (R_1 \cdot R_2)}{(R_1 + R_2) \cdot R_1} = \frac{I \cdot R_2}{(R_1 + R_2)}$$

По аналогии

$$I_2 = \frac{I \cdot R_1}{(R_1 + R_2)}$$

**Смешанное соединение** элементов содержит последовательное и параллельное соединение пассивных и активных элементов. Электрическая цепь (рис.1.7) содержит два пассивных элемента  $R_2$  и  $R_3$ , соединенных параллельно и элемент  $R_1$ , соединенный с ними параллельно. Для расчета токов в ветвях цепи *произведём эквивалентные преобразования*: элементы  $R_2$  и  $R_3$ , соединенные параллельно заменим на эквивалентный им элемент с сопротивлением  $R_{23}$ , а затем последовательно соединенные  $R_1$  и  $R_{23}$  *заменим* на эквивалентный им элемент с сопротивлением  $R_{ЭК}$  (рис.1.8).

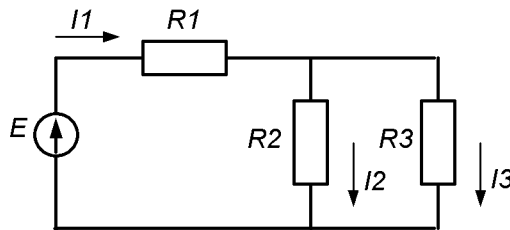


Рис. 1.7 Смешанное соединение элементов электрической цепи

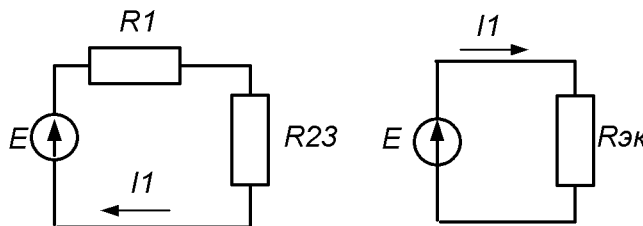


Рис. 1.8 Эквивалентные преобразования при смешанном соединении элементов электрической цепи

Определим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{E}{R_{\Sigma}},$$

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1 + R_2 \cdot R_3}{(R_2 + R_3)}.$$

Напряжение  $U_{23}$ , приложенное к элементам  $R_2$  и  $R_3$ ,  $U_{23} = I_1 \cdot R_{23}$ , а токи  $I_2$  и  $I_3$  соответственно равны:

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_{23}}{R_3}.$$

#### 1.4 Электрическая мощность и энергия

Ленц, а затем Джоуль опытным путём установили, что количество энергии, поглощаемой в проводнике, пропорционально времени  $t$  протекания тока, квадрату величины тока и электрическому сопротивлению проводника

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

Электрическая энергия, отдаваемая или поглощаемая в единицу времени элементом электрической цепи, определяет мощность электрического тока

$$P = I^2 R = I \cdot I \cdot R = U \cdot I$$

Для источника электрической энергии

$$P_1 = E \cdot I$$

Мощность, отдаваемая источником электрической энергии во внешнюю цепь, меньше мощности источника на величину мощности, теряемой на внутреннем сопротивлении источника  $R_0$

$$P_2 = E \cdot I - I^2 \cdot R_0$$

Правильность расчетов токов в ветвях электрической цепи проверяется составлением баланса мощностей отдаваемых источниками электрической энергии и получаемых приёмниками электрической энергии. Условие баланса мощностей следует из закона сохранения энергии. Пример составления баланса

мощностей для цепи со смешанным соединением элементов (рис. 1.7)

$$E \cdot I_1 = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3$$

При составлении уравнения баланса мощностей *в левой его части* записываются со знаком плюс слагаемые, для которых направления э.д.с. и токов совпадают. Если направления э.д.с. и токов противоположны, слагаемые записываются со знаком минус *в левой части* уравнения баланса мощностей или в правой части со знаком плюс, что соответствует работе источника в режиме потребителя электрической энергии.

### Контрольные вопросы

1. Дать определение простым цепям.
2. Что представляет собой последовательное соединение элементов? Чему равно их суммарное сопротивление?
3. Что представляет собой параллельное соединение элементов? Чему равно их суммарное сопротивление?
4. Что представляет собой смешанное соединение элементов? Чему равно их суммарное сопротивление?
5. Как рассчитать мощность энергии, выделяемой в сопротивлении?
6. Как рассчитать мощность энергии, доставляемой в цепь источниками?
7. Дать определение уравнению баланса мощностей.

### 1.5 Основные законы и уравнения электрических цепей

Основными физическими законами, позволяющими описать любые режимы электрической цепи, являются *законы Ома и Кирхгофа*.

#### Закон Ома

1. Закон Ома для участка цепи, не содержащего э.д.с., устанавливает связь между током и напряжением на этом участке (рис. 1.9).

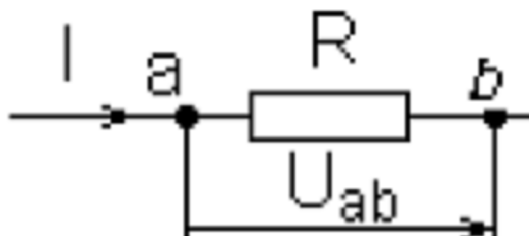


Рис. 1.9 Закон Ома для участка цепи, не содержащего э.д.с.

2. Закон Ома для участка цепи, содержащего источник э.д.с. (обобщенный закон Ома).

Обобщённый закон Ома позволяет найти ток этого участка по известной разности потенциалов на концах участка цепи и имеющейся на этом участке э.д.с.  $E$ .

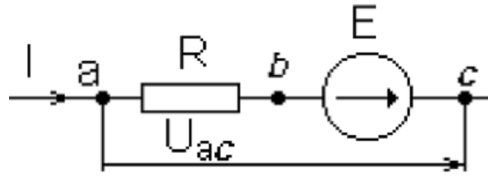


Рис. 1.10 Закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с.

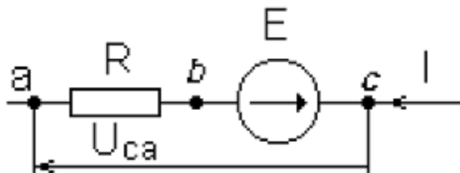
Имея в виду, что в неразветвленном участке электрической схемы с произвольным числом э.д.с., сопротивлений и заданной разностью потенциалов  $\varphi$  на его концах, ток направлен от высшего потенциала к низшему.

Если предположить, что  $\varphi_a > \varphi_c$ , то ток и напряжение будут направлены от точки  $a$  к точке  $c$ . (рис. 1.10).

$$\varphi_a - \varphi_c = U_{ac}; \quad (1.8)$$

$$I = \frac{U_{ac} + E}{R}. \quad (1.9)$$

Если предположить, что  $\varphi_a < \varphi_c$ , то ток и напряжение будут направлены от точки  $c$  к точке  $a$ , напряжение и ток определим по формулам (1.8), (1.9) (рис. 1.11).



$$\varphi_c - \varphi_a = U_{ca};$$

$$I = \frac{U_{ca} - E}{R}.$$

Рис. 1.11 Закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с., в случае  $\varphi_a < \varphi_c$

### Законы Кирхгофа

Основными уравнениями теории электрических цепей являются уравнения Кирхгофа, поэтому все электрические цепи подчиняются первому и второму законам Кирхгофа.

Оба эти закона установлены на основе многочисленных опытов и являются следствием закона сохранения энергии.

Первый закон Кирхгофа можно сформулировать двояко:

1. Алгебраическая сумма токов, подтекающих к любому узлу схемы, равна нулю:

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \quad (1.10)$$

(Подтекающие к узлу токи считаются положительными, а утекающие – отрицательными).

2. Сумма подтекающих к любому узлу токов равна сумме утекающих от узла токов:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4. \quad (1.11)$$

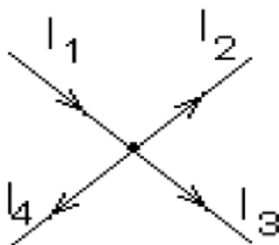


Рис. 1.12 К первому закону Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа можно также сформулировать двояко:

1. Алгебраическая сумма напряжений (не падений напряжений) вдоль любого контура равна нулю

$$\sum U_k = 0, \quad (1.12)$$

$$U_{ae} + U_{ec} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

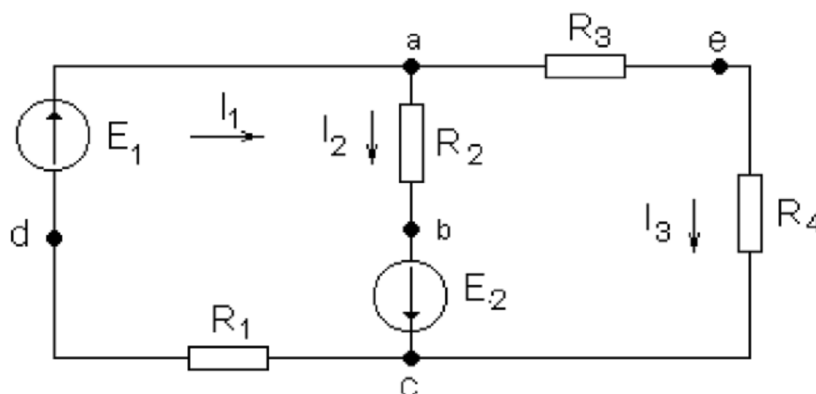


Рис. 1.13 Ко второму закону Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме э.д.с. вдоль того же контура:

$$\sum I \cdot R = \sum E. \quad (1.13)$$

При составлении уравнений слагаемые берут со знаком плюс, если действующие на участках напряжения и э.д.с. совпадают с направлением

обхода, и со знаком минус, если их действия противоположны направлению обхода.

При составлении уравнений для расчёта токов в схемах с помощью законов Кирхгофа необходимо придерживаться следующего алгоритма:

1. Произвольно задаются положительные направления токов.
2. Произвольно задаются положительные направления обхода контуров (с целью единообразия рекомендуется для всех контуров положительные направления обхода выбирать одинаковыми, например, по часовой стрелке).
3. Составляют уравнения по первому закону Кирхгофа. Число таких уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов.
4. Недостающие уравнения составляют по второму закону Кирхгофа, при этом учитывают, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в предыдущие контуры, для которых записаны уравнения.
5. Решая полученную систему уравнений, находим неизвестные токи. Если какой-то ток или несколько токов, оказались отрицательными, то это значит, что действительное направление этих токов противоположно выбранному.

### **Контрольные вопросы**

1. Сформулировать закон Ома для участка цепи, не содержащего э.д.с.
2. Сформулировать закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с.
3. Сформулировать первый закон Кирхгофа (оба определения).
4. Сформулировать второй закон Кирхгофа (оба определения).
5. Какое число уравнений по законам Кирхгофа должно быть составлено для решения схемы?
6. Что такое независимый контур схемы?
7. Как поступают, если в результате решения ток получился отрицательным?
8. Для каких цепей (линейных или нелинейных) справедливы законы Кирхгофа?

## **1.6 Методы решения электрических цепей**

### ***1.6.1 Метод контурных токов***

Метод расчета путём решения уравнений, основанных на законах Кирхгофа, рассмотренные выше, трудоёмок. Например, для цепи, имеющей шестнадцать ветвей, требуется решать систему шестнадцати уравнений.

Значительно упрощают расчет методом контурных токов, так как он позволяет сократить число уравнений.

При расчёте этим методом полагают, что в каждом независимом контуре схемы течёт свой контурный ток. Уравнения составляют относительно контурных токов, после чего через них определяют токи ветвей. Рассмотрим принцип этого метода на примере для схемы на рис. 1.14.

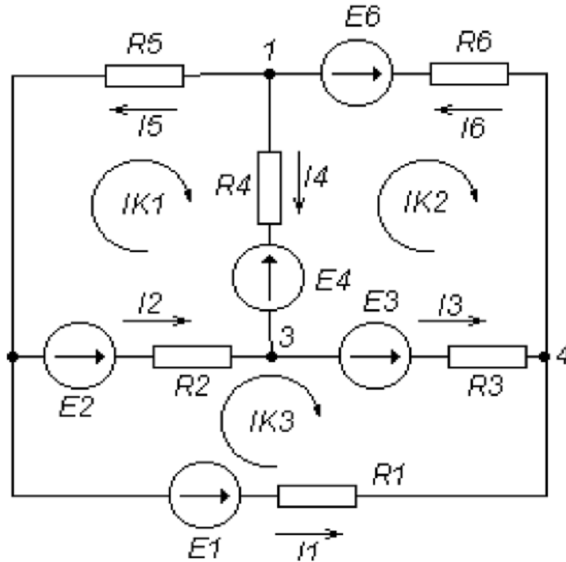


Рис. 1.14 К методу контурных токов

Для начала произвольно выбираем положительные направления контурных токов (удобнее по часовой стрелке).

Если в схеме три контура, то систему уравнений для решения методом контурных токов записывают следующим образом:

$$\begin{cases} R_{11} \cdot I_I + R_{12} \cdot I_{II} + R_{13} \cdot I_{III} = E_{11} \\ R_{21} \cdot I_I + R_{22} \cdot I_{II} + R_{23} \cdot I_{III} = E_{22} \\ R_{31} \cdot I_I + R_{32} \cdot I_{II} + R_{33} \cdot I_{III} = E_{33} \end{cases} \quad (1.14)$$

В данной системе  $R_{11}, R_{22}, R_{33}$  – суммы сопротивлений первого, второго и третьего контуров соответственно:

$$R_{11} = R_5 + R_4 + R_2; \quad R_{22} = R_6 + R_4 + R_3; \quad R_{33} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Сопротивления смежных ветвей  $R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{23}, R_{31}, R_{33}$  берут со знаком минус, так как направление контурных токов во всех ветвях встречное (если они по направлению совпадают, то смежное сопротивление берётся со знаком плюс).





Если направление тока  $I$ , протекающего через э.д.с.  $E$ , совпадает с направлением э.д.с., то произведение  $E \cdot I$  входит в уравнение с положительным знаком, так как источник э.д.с. доставляет в цепь энергию.

Если направление тока  $I$  направлено встречно э.д.с.  $E$ , то источник э.д.с. потребляет энергию (например, зарядка аккумулятора), и произведение  $E \cdot I$  входит в уравнение с отрицательным знаком.

Перед произведением же  $I^2 \cdot R$  всегда будет знак плюс, так как здесь значение тока берётся в квадрате.

### 1.6.2 Метод наложения

Ещё один метод расчета линейных электрических цепей называется методом наложения. В его основе лежит принцип наложения, который можно сформулировать следующим образом: ток в любой ветви равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждой из э.д.с. схемы в отдельности.

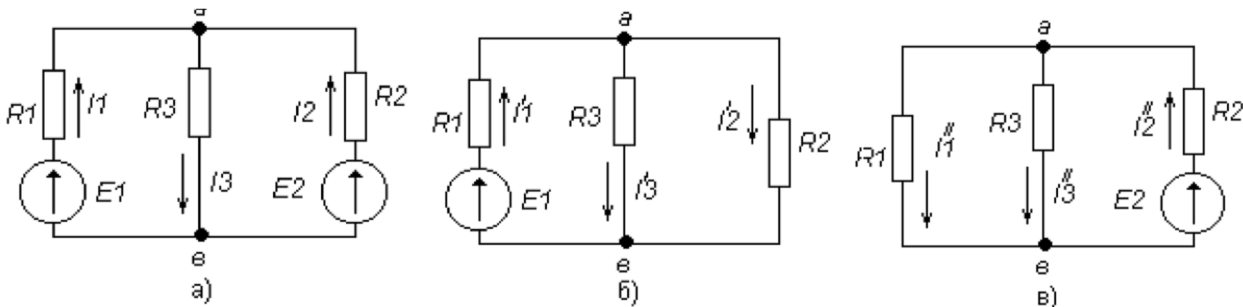


Рис. 1.15 К методу наложения

Рассмотрим применение данного метода на примере:

На исходной схеме (рис 1.15а) произвольно выбираем направления токов. Рассчитываем цепь от действия э.д.с.  $E_1$ , для чего мысленно закорачиваем (убираем) все остальные э.д.с., в нашем случае э.д.с.  $E_2$  (рис 1.15б).

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2}}; \quad U'_{ab} = E_1 - I'_1 \cdot R_1; \quad I'_3 = \frac{U'_{ab}}{R_3}; \quad I'_2 = \frac{U'_{ab}}{R_2}.$$

Затем рассчитываем цепь от действия э.д.с.  $E_2$ , для чего мысленно закорачиваем э.д.с.  $E_1$  (рис 1.15в).

$$U''_{ab} = E_2 - I''_1 \cdot R_2; \quad I''_3 = \frac{U''_{ab}}{R_3}; \quad I''_1 = \frac{U''_{ab}}{R_1}.$$

Действительные токи находим как алгебраическую сумму найденных частичных токов.

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = -I'_2 + I''_2; \quad I_3 = I'_3 + I''_3.$$

Значения токов  $I'$  и  $I''$  берём со знаком минус, если они направлены в другую сторону, нежели ток на исходной схеме.

### 1.6.3 Метод узловых потенциалов

В тех случаях, когда в анализируемой схеме число узлов без единицы меньше числа независимых контуров, метод узловых потенциалов является более экономичным по сравнению с методом контурных токов.

Суть этого метода состоит в определении напряжений между узлами сложной электрической цепи путём решения системы уравнений, составленных на основе первого закона Кирхгофа. После нахождения неизвестных потенциалов, используя закон Ома, определяют токи во всех ветвях, и выясняют их истинное направление.

Потенциал любой одной точки схемы можно принять равным нулю, так как ток в ветви зависит не от абсолютных значений потенциалов узлов, а от разности потенциалов на концах ветви.

При этом число неизвестных уменьшается с  $n$  до  $n - 1$ .

Рассмотрим применение данного метода для расчета цепи, приведённой на рис. 1.16, которая имеет большое число ветвей (7 ветвей) и сравнительно небольшое число узлов (4 узла).

Если узел 0 мысленно заземлить, то есть принять его потенциал равным 0, то неизвестными будут потенциалы только трёх узлов:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ .

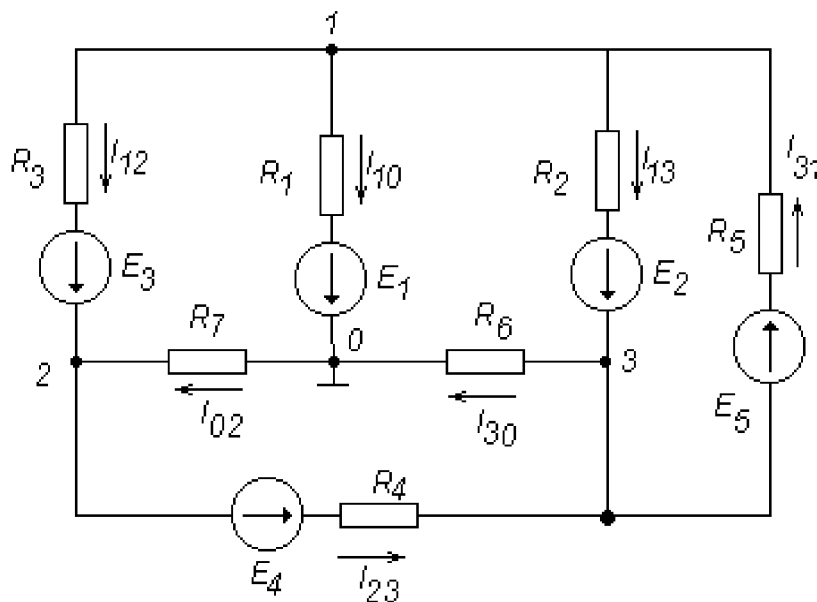


Рис. 1.16 К методу узловых потенциалов

Первоначально в исходной схеме произвольно задаём направления токов, которые обозначаются с двумя индексами: первый индекс определяет номер узла, от которого течет ток, а второй – номер узла, к которому ток подтекает.

Для расчета цепи составляют систему уравнений:

$$\begin{cases} g_{11} \cdot \varphi_1 + g_{12} \cdot \varphi_2 + g_{13} \cdot \varphi_3 = I_{11} \\ g_{21} \cdot \varphi_1 + g_{22} \cdot \varphi_2 + g_{23} \cdot \varphi_3 = I_{22}, \\ g_{31} \cdot \varphi_1 + g_{32} \cdot \varphi_2 + g_{33} \cdot \varphi_3 = I_{33} \end{cases}$$

где  $g_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}$  – сумма проводимостей ветвей, сходящихся в узле 1;

$g_{12} = -\frac{1}{R_3}$  – проводимость ветви, находящейся между узлами 1 и 2, принято

всегда брать со знаком минус «-».

Проводимости

$$g_{12} = g_{21}, \quad g_{13} = g_{31}, \quad g_{23} = g_{32};$$

$I_{11} = \frac{E_5}{R_5} - \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3}$  – узловый ток первого узла, равный алгебраической

сумме токов, сходящихся в узле.

В образовании узлового тока  $n$ -й ветви участвуют лишь те ветви, подходящие к этому узлу, которые содержат источники э.д.с. и источники тока.

Если э.д.с. и ток источника тока направлены к узлу, то ставится знак плюс «+», в противном случае «-» минус.

После решения системы уравнений определяют токи в ветвях по закону Ома:

$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_3}{R_3}; \quad I_{13} = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_2}{R_2}; \quad I_{31} = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_5}{R_5}; \quad I_{30} = \frac{\varphi_3}{R_6}; \quad I_{02} = \frac{-\varphi_2}{R_7}.$$

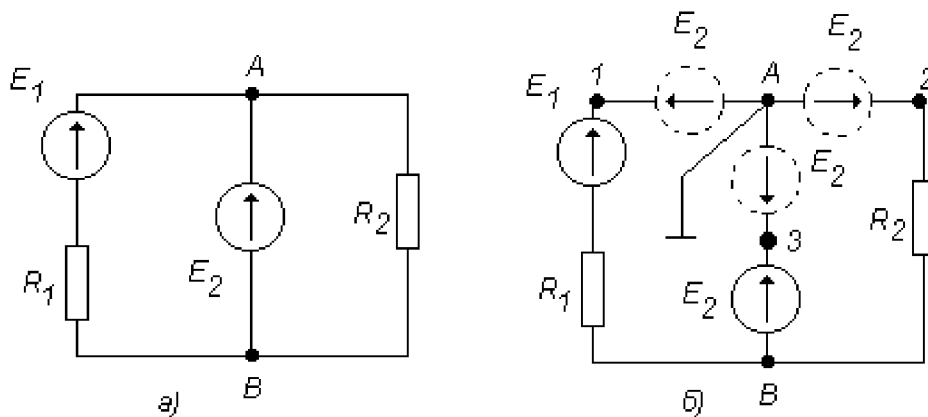


Рис. 1.17 Включение встречной э.д.с. и добавление такой же э.д.с. в оставшиеся ветви

В заключение делают проверку баланса мощностей:

$$\sum_1^n \pm E \cdot I = \sum_1^k I^2 R.$$

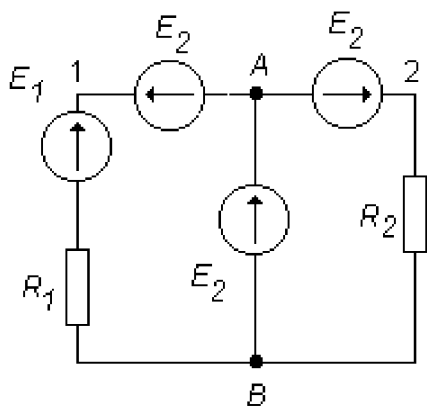


Рис. 1.18 Результирующая схема

1. Если в ветви находится идеальный источник э.д.с. без других сопротивлений, то проводимость такой ветви равна бесконечности (рис. 1.17а). В этом случае применяют следующий приём. В такой ветви встречно данному источнику э.д.с. включают такой же источник, э.д.с. которого равна первому. Чтобы токи в ветвях не изменялись, в оставшиеся ветви добавляют такие же источники э.д.с., направленные от узла а.

При этом потенциалы точек 1, 2 и 3 будут равны, то есть могут быть объединены в одну точку А (таким образом, исходная схема в принципе не нарушена). В результате получим схему, изображенную на рис. 1.18.

2. Если в ветви находится идеальный источник тока, то его проводимость равна нулю ( $R_{внутр} \rightarrow \infty$ ). В этом случае применяют правило переноса источника тока.

В результате такого преобразования в каждом из узлов значения токов не изменяются. Например, ток в узле b остался неизменным, так как в этот узел добавили и вычли ток J. Из узла а ток J также вытекает, только теперь с другой стороны.

#### 1.6.4 Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники э.д.с. и источники тока, одной эквивалентной ветвью

При расчете сложных схем существенное облегчение дает замена нескольких параллельно включенных ветвей, содержащих источники э.д.с. с сопротивлениями и источники тока, одной эквивалентной ветвью.

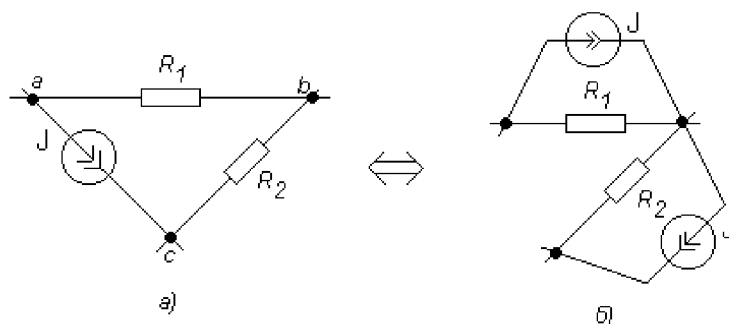


Рис. 1.19 Тожественность замены схем

Участок левой цепи эквивалентен участку правой цепи, если при любых значениях тока  $I$ , подтекающего к этой цепи, напряжение на зажимах  $a$  и  $b$  в обеих схемах будет одинаковым. Определим, чему в этом случае должны равняться  $R_3$  и  $E_3$ .

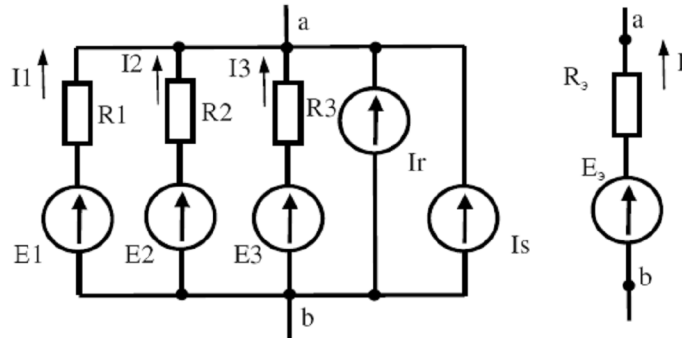


Рис. 1.20 Замена нескольких параллельных ветвей одной эквивалентной

Для левой части схемы

$$I1 + I2 + I3 + Ir + Is = I,$$

но

$$\begin{aligned} I1 &= \frac{E1 - U_{ab}}{R1} = (E1 - U_{ab})g1 \\ I2 &= (E2 - U_{ab})g2 \\ &\dots\dots\dots \\ I_n &= (E_n - U_{ab})g_n \end{aligned} \tag{1.16}$$

Следовательно,

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k + U_{ab} \sum_{k=1}^n g_k, \tag{1.17}$$

где  $n$  – число параллельных ветвей с источниками э.д.с.,  $q$  – число ветвей с источниками тока.

Для правой схемы

$$I = E_3 g_3 - U_{ab} g_3, \tag{1.18}$$

где  $g_3 = \frac{1}{R_3}$ .

Равенство токов правой и левой схем должно иметь место при любых значениях  $U_{ab}$ , а это возможно при

$$g_3 = \sum_{k=1}^n g_k. \tag{1.20}$$

Но если слагаемые с  $U_{ab}$  в (1.17) и (1.18) равны и токи  $I$  по условию

эквивалентности правой и левой схем также равны, то

$$\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k = E_9 g_9,$$

откуда

$$E_9 = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k}{\sum_{k=1}^n g_k}. \quad (1.21)$$

Формула (1.20) дает возможность найти проводимость  $g_9$  и по ней  $R_9$ . Из формулы видно, что проводимость  $g_9$  не зависит от того, есть ли в ветвях исходной схемы э.д.с. или нет.

При подсчетах по полученной формуле следует иметь в виду следующее: если в какой-либо ветви схемы э.д.с. будут отсутствовать, то соответствующее слагаемое в числителе выпадает, но проводимость этой ветви в знаменателе формулы остается; если какая-либо э.д.с. в исходной схеме имеет направление, обратное приведенному на рисунке, то соответствующее слагаемое войдет в числитель формулы со знаком минус.

### 1.6.5 Метод двух узлов

Часто встречаются схемы, содержащие всего два узла. Наиболее радикальным методом расчета токов в них является метод двух узлов.

Под методом двух узлов понимают метод расчета эл. цепей, в котором за искомое принимают напряжение между двумя узлами схемы. Затем на основании полученного напряжения определяют токи в ветвях схемы.

Расчетные формулы этого метода получают на основе формул (1.16) и (1.17). Их также можно получить из более общего метода – метода узловых потенциалов.

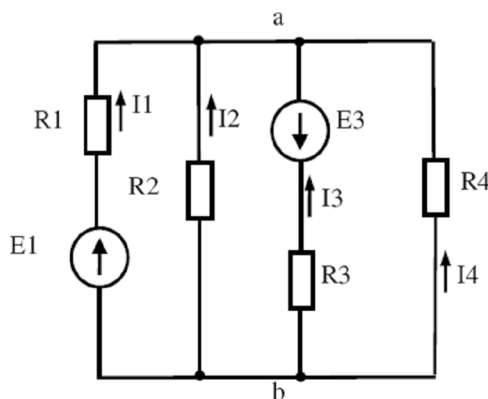


Рис. 1.21 К методу двух узлов

В отличие от предыдущей схемы ток  $I$  к узлам  $a$  и  $b$  схемы не подтекает.

Поэтому, если в формуле (1.16) принять  $I = 0$ , то из нее можно найти напряжение  $U_{ab}$  между двумя узлами:

$$U_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^n E_k g_k + \sum_{k=1}^q I_k}{\sum_{k=1}^n g_k}$$

После определения  $U_{ab}$  находят ток в любой ветви по формуле (1.16).

### ***1.6.6 Метод эквивалентного генератора***

В практических расчётах часто нет необходимости знать режимы работы всех элементов сложной цепи, но ставится задача исследовать режимы работы одной определённой ветви.

При расчёте сложной электрической цепи приходится выполнять значительную вычислительную работу даже в том случае, когда требуется определить ток в одной ветви. Объём этой работы в несколько раз увеличивается, если необходимо установить изменение тока, напряжения, мощности при изменении сопротивления данной ветви, так как вычисления нужно производить несколько раз, задаваясь различными значениями сопротивления.

В любой электрической схеме можно мысленно выделить какую-то одну ветвь, а всю остальную часть схемы, независимо от структуры и сложности, условно изобразить прямоугольником, который представляет собой так называемый двухполюсник.

Таким образом, двухполюсник – это обобщённое название схемы, которая двумя выходными зажимами (полюсами) присоединена к выделенной ветви. Если в двухполюснике есть источник э.д.с. или тока, то такой двухполюсник называют активным. Если в двухполюснике нет источника э.д.с. или тока, то его называют пассивным.

При решении задачи методом эквивалентного генератора (активного двухполюсника) необходимо:

1. Мысленно заключить всю схему, содержащую э.д.с. и сопротивления, в прямоугольник, выделив из нее ветвь  $ab$ , в которой требуется найти ток (рис 1.22).

2. Найти напряжение на зажимах разомкнутой ветви  $ab$  (в режиме холостого хода).



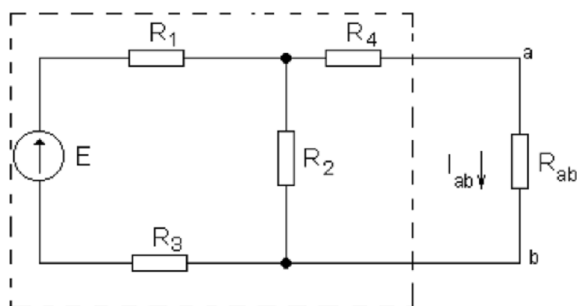


Рис. 1.22 К методу эквивалентного генератора

Напряжение холостого хода  $U_0$  (эквивалентное э.д.с.  $E_{\mathcal{G}}$ ) для рассматриваемой цепи можно найти так:

$$U_0 = E_{\mathcal{G}} = I \cdot R_2 = \frac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

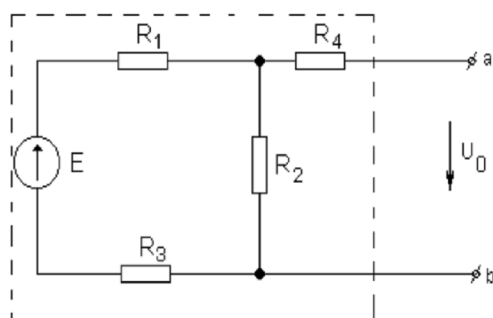


Рис. 1.23 Напряжение эквивалентного генератора

Сопротивление  $R_4$  в расчёт не вошло, так как при разомкнутой ветви  $ab$  ток по нему не протекает.

3. Найти эквивалентное сопротивление. При этом источники э.д.с. закорачиваются, а ветви, содержащие источники тока, размыкаются. Двухполюсник становится пассивным.

Для данной схемы

$$R_{\mathcal{G}} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4.$$

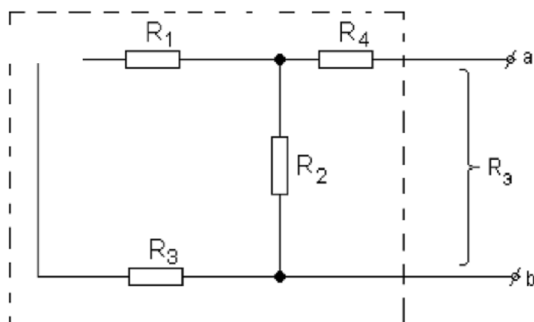


Рис. 1.24 Внутреннее сопротивление эквивалентного генератора

Значение тока для данной схемы:

$$I_{ab} = \frac{U_0}{R_{\Sigma} + R_{ab}}.$$

### Контрольные вопросы

1. В чем преимущество метода контурных токов перед методом уравнений Кирхгофа?
2. Сколько уравнений должно быть составлено при решении методом контурных токов?
3. В чем сущность метода контурных токов?
4. Что такое собственное сопротивление контура? Взаимное?
5. С каким знаком берется взаимное сопротивление, если токи в смежных ветвях направлены встречно? Согласно?
6. В чем сущность метода наложения?
7. В чем сущность метода узловых потенциалов?
8. Когда более выгодно применить метод узловых потенциалов по сравнению с методом контурных токов?
9. Что такое метод двух узлов?
10. Что такое двухполюсник?
11. Когда двухполюсник называют активным? Пассивным?
12. Когда применяется метод эквивалентного генератора?

## 2. ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

### 2.1 Основные понятия о цепях однофазного синусоидального тока

*Переменный ток* начал широко применяться в электротехнике после того, как была решена задача централизованного производства электроэнергии и передачи её по линиям на значительные расстояния [1.3.]. Из экономических соображений и условий безопасности используют два вида напряжения: высокое, несколько десятков тысяч вольт для передачи электроэнергии по длинным линиям электропередач, и сравнительно низкое напряжение, сотни вольт для распределения электроэнергии потребителям.

Переменным током называют ток, изменяющийся во времени по величине и направлению. Его значение в любой момент времени называют *мгновенным значением и обозначают  $i$* . Через поперечное сечение проводника возможны два направления тока. Одно принимают за положительное, другое считают отрицательным. Ток определён, если известна зависимость его мгновенного значения от времени и указано его положительное направление [2]. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени, в той же самой последовательности называют периодическими. Наименьший промежуток времени, через который повторяются равные значения тока, называют *периодом  $T$* . Величина, обратная периоду, называется *частотой  $f$* . Частота равна числу периодов в единицу времени (в секунду). Если частота тока в сети 50 герц, это значит, что ток меняет свое направление в сети 50 раз за секунду.

Наиболее широкое применение в электроэнергетике получили (гармонические или) *синусоидальные токи*, то есть токи, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону. При синусоидальных э.д.с. в линейных цепях с элементами, параметры которых не зависят от величин токов и напряжений, токи и напряжения на отдельных участках также синусоидальные.

Для получения синусоидальных токов служат генераторы переменного тока. Генератор состоит из статора и ротора. На роторе расположены электромагниты с различным количеством пар магнитных полюсов –  $p$ . В пазах статора уложены проводники обмотки статора. При вращении магнитное поле ротора пересекает проводники обмотки статора и в ней наводится переменная э.д.с. Для получения синусоидальной э.д.с. необходимо, чтобы распределение магнитной индукции –  $B$  по окружности статора было близко к синусоидальному. За один оборот ротора происходит –  $p$  полных циклов изменения э.д.с. Если ротор совершает –  $n$  оборотов в минуту, то получается –  $pn$  периодов в минуту, и тогда частота тока в обмотке статора

$$f = \frac{p \cdot n}{60} \text{ герц}$$

Мгновенное значение синусоидального тока определяется выражением

$$i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$$

где  $I_m$  – максимальное значение тока или амплитуда, аргумент синуса определяет стадию или фазу гармонического изменения тока и называется фазным углом или фазой,

$\omega$  – круговая частота,

$t$  – время,

$\alpha$  – значение фазного угла в начальный момент времени (при  $t=0$ ,  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$ ).

Если синусоидальные функции одновременно достигают нулевых или амплитудных значений, то они сдвинуты относительно друг друга по фазе.

## 2.2 Среднее и действующее значение синусоидально изменяющейся величины

Под средним значением синусоидально изменяющейся величины понимают среднее значение ее за полпериода. Так, среднее значение тока

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m,$$

т.е. среднее значение синусоидального тока составляет  $\frac{2}{\pi} = 0,638$  от амплитуды. Следует обратить внимание, что среднее значение берется за полпериода, поскольку среднее значение за период синусоидально изменяющейся величины равно нулю.

Очень широко применяют действующее значение синусоидально изменяющейся величины, которое называют также эффективным, среднеквадратичным или тепловым. Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Следовательно, действующее значение синусоидального тока равно 0,707 от амплитуды.

Можно сопоставить тепловое действие синусоидального тока с тепловым действием постоянного тока  $I_{ном}$ , текущего за то же время по тому же

сопротивлению.

Количество теплоты, выделенное за один период синусоидальным током,

$$\int_0^T Ri^2 dt = RI_m^2 \frac{T}{2}.$$

Выделенное за то же время постоянным током тепло равно  $RI_{пост}^2 T$ .  
Приравняем их:

$$RI_m^2 T = RI_{пост}^2 T \quad \text{или} \quad I_{пост} = I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, действующее значение синусоидального тока численно равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество тепла, что и синусоидальный ток.

### 2.3 Изображение синусоидальных функций времени вращающимися векторами

Расчет цепей переменного тока облегчается, если синусоидально изменяющиеся во времени функции изображать вращающимися векторами или комплексными числами [3]. Выбираем прямоугольную систему осей  $+$ ,  $+j$  и располагаем в этой системе координат вектор  $\vec{I} = Ie^{j\alpha}$ , длина которого равна действующему значению тока, угол  $\alpha$  – значение фазного угла в начальный момент времени, при  $t = 0$ . Вектор  $\vec{I}$ , начиная со времени  $t = 0$ , вращается *против* часовой стрелки с угловой частотой  $\omega$ , и через время  $t$  составит с горизонтальной осью угол  $\omega t + \alpha$ . Проекция вектора  $\vec{I}$  на вертикальную ось даёт в выбранном масштабе *мгновенное значение тока*  $i$  в момент времени  $t$  и изменяется во времени по синусоидальному закону

$$i = I \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

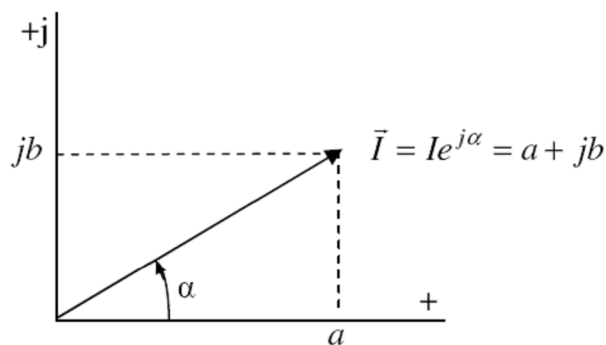


Рис. 2.1 Вращающийся вектор тока  $\vec{I}$

Таким образом, мгновенные значения тока  $i$  зависят от угла между вращающимся вектором  $\vec{I}$  и горизонтальной осью координат (рис. 2.1). На основании выше изложенного вращающийся вектор  $\vec{I}$  называют вектором, изображающим синусоидальную функцию времени, то есть вектором тока. Так же введены термины вектор напряжения, вектор э.д.с., вектор магнитного потока.

Рисунок, содержащий совокупность векторов, изображающих синусоидальные функции времени, называется векторной диаграммой.

### Контрольные вопросы

1. Что такое мгновенное значение переменного тока? Как оно обозначается?
2. Что такое период и частота переменного тока? Как они связаны?
3. Описать математическим выражением мгновенное значение переменного тока.
4. Что такое действующее значение переменного тока? Назовите синонимы действующего значения.
5. Что такое среднее значение переменного тока?
6. Как изображается вектор на комплексной плоскости?
7. Что такое векторная диаграмма?

### 2.4 Элементы идеализированной цепи

Электрический ток в проводниках всегда вызывает образование магнитного и электрического поля вблизи проводника с током. Если ток переменный, эти поля изменяются во времени. Изменение магнитного поля наводит э.д.с. в проводнике, а изменение электрического поля приводит к изменению зарядов на проводниках. В проводниках с электрическим током и в окружающей их среде происходит выделение тепла. В электрической цепи нельзя выделить участок цепи, в котором не происходили бы указанные выше явления. Для упрощения рассмотрения процессов в электрической цепи, её *заменяют идеализированной цепью*, составленной из *идеальных элементов*, в каждом из которых *наблюдается только одно явление*: наличие или электрического поля, или магнитного, или происходит выделение тепла.

**Идеальный элемент**, в котором наблюдается только преобразование электромагнитной *энергии в тепло*, характеризуется *активным сопротивлением  $R$*  или проводимостью  $g$ . Для любого момента времени

напряжение и ток связаны законом Ома:  $u = R \cdot i$ , где  $u$  – мгновенное значение напряжения. При синусоидальном напряжении  $u = U_m \sin \omega t$  ток также синусоидальный и совпадает по фазе с напряжением  $i = I \cdot \sin \omega t$  и, следовательно, на векторной диаграмме вектора тока  $\vec{I}$  и напряжения  $\vec{U}$  совпадают (рис. 2.2).

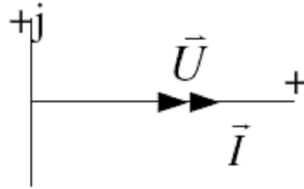


Рис. 2.2 Векторная диаграмма тока и напряжения для активного сопротивления

Мгновенная мощность, передаваемая в активное сопротивление  $R$ :

$$p = u \cdot i = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U \cdot I (1 - \cos 2\omega t)$$

содержит постоянную составляющую  $U \cdot I$  и переменную составляющую, которая изменяется с угловой частотой  $2\omega$  в течение периода от 0 до  $UI$ .

Среднее значение мощности, получаемой за период активным сопротивлением  $R$ , называется активной мощностью и обозначается

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R$$

**Идеальный элемент**, в котором происходит преобразование электрической энергии только *в энергию магнитного поля*, называется *идеальной индуктивностью*, его активное сопротивление  $R = 0$  и он характеризуется параметром «индуктивность». Индуктивность обозначается  $L$ .

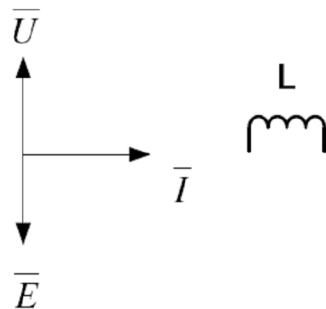


Рис. 2.3 Векторная диаграмма и условно-графическое изображение идеальной индуктивности

Изменение тока  $i$  в индуктивности приводит к изменению магнитного потока  $\Phi$ , а следовательно, согласно закону электромагнитной индукции, вызывает э.д.с. самоиндукции  $e_L$ . При синусоидальном токе  $i = I_m \cdot \sin \omega \cdot t$  наведенная э.д.с. самоиндукции определяется следующим выражением:

$$-L \left( \frac{di}{dt} \right) = -\omega \cdot L \cdot I_m \cdot \cos \omega \cdot t = E_m \cdot \sin \left( \omega \cdot t - \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $E_m = \omega \cdot L \cdot I_m$

Электродвижущая сила самоиндукции  $e_L$  отстает по фазе от тока на  $\pi/2$  и соответственно вектор  $\vec{E}$  на векторной диаграмме рис.2.3. отстает от вектора тока  $\vec{I}$  на  $\pi/2$ . Вращение векторной диаграммы происходит против часовой стрелки. Для того чтобы через индуктивность проходил ток, к ней должно быть приложено напряжение  $U$ , равное по величине и противоположное по фазе наведенной э.д.с. самоиндукции  $e_L$ :

$$u = -e_L = -L \left( \frac{di}{dt} \right) = \omega \cdot L \cdot I_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $U_m = E_m = \omega \cdot L \cdot I_m$

Произведение  $\omega L$  имеет размерность сопротивления и называется **индуктивным** сопротивлением, оно прямо пропорционально частоте тока в цепи  $f$  и обозначается  $X_L$ . Выразим  $\omega$  через частоту тока и получим зависимость индуктивного сопротивления от частоты

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L.$$

Мгновенная мощность, поступающая от источника электрической энергии в индуктивность:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) = U \cdot I \cdot \sin(2\omega t)$$

изменяется во времени по синусоидальному закону с частотой  $2\omega$ .

**Среднее значение мощности**, получаемой индуктивностью за период, или **активная мощность** равна нулю  $P = 0$ . Энергия  $\hat{W}_L$ , потребляемая идеальной индуктивностью, запасается в её магнитном поле и изменяется по синусоидальному закону с частотой  $2\Omega t$  в пределах от 0 до  $LI^2$ .

$$\hat{W}_L = \frac{L \cdot i^2}{2} = \frac{L \cdot I_m^2}{2 \cdot \sin^2 \omega t} = \frac{L \cdot I^2}{2 \cdot (1 - \cos 2\omega t)}.$$

При увеличении абсолютного значения  $i$  э.д.с. самоиндукции направлена



против тока, а приложенное напряжение  $u = -e_L$  и совпадает по направлению с током. Мгновенная мощность имеет **положительное** значение  $p = u \cdot i > 0$ , т.е. источник электрической энергии **совершает положительную работу** против э.д.с. самоиндукции и в магнитном поле индуктивности **запасается энергия**  $\hat{W}_L$ .

При уменьшении абсолютного значения  $i$  э.д.с. самоиндукции совпадает по направлению с током, а приложенное напряжение  $u$  направлено против тока  $i$ . При этом  $p = u \cdot i < 0$  и **энергия**  $\hat{W}_L$  из магнитного поля индуктивности **возвращается источнику** электрической энергии, т.е. источник электрической энергии **не совершает** положительную работу. Таким образом, в **идеальном индуктивном элементе** не совершается полезная работа, а происходит только непрерывный **обмен энергией** между источником электрической энергии и магнитным полем индуктивности.

В действительности идеальных индуктивных элементов не существует, так как **реальные индуктивные элементы** изготавливаются из проводников, которые всегда **имеют активное сопротивление  $R$** .

**Идеальный элемент**, в котором происходит **преобразование электрической энергии только в энергию электрического поля**, называется **идеальной ёмкостью**, его активное сопротивление  $R = 0$  и он характеризуется параметром ёмкость, обозначается символом  $C$ . Идеальная ёмкость в цепи постоянного тока или идеальный конденсатор при установившемся режиме является как бы разрывом цепи, т.е. **не проводит постоянный ток**. Для переменного тока ёмкость не является такой преградой. Если конденсатор включен в цепь с изменяющимся во времени напряжением  $u$ , то на поверхностях его обкладок изменяется заряд. Изменение заряда  $dq$  на обкладках происходит за счет перемещения зарядов по проводникам, соединяющим конденсатор с источником электрической энергии, т.е. по проводникам проходит ток

$$i = \frac{dq}{dt} = C \left( \frac{du}{dt} \right)$$

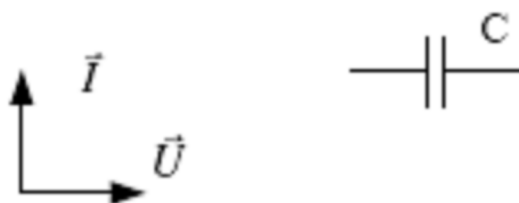


Рис. 2.4 Векторная диаграмма и условно-графическое изображение емкости

При синусоидальном напряжении  $u = U_m \cdot \sin \omega t$  ток  $i$  можно выразить следующим образом:

$$i = C \left( \frac{du}{dt} \right) = \omega \cdot C \cdot U_m \cdot \cos \omega t = I_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $I = \omega \cdot C \cdot U$ .

Ток  $i$  опережает по фазе напряжение  $u$  на четверть периода (рис.2.4).

Из соотношения

$$I_m = \omega \cdot C \cdot U_m$$

следует, что  $U_m = \left( \frac{1}{\omega \cdot C} \right) \cdot I_m$

Множитель  $\frac{1}{\omega \cdot C}$  согласно закону Ома имеет размерность сопротивления и называется *ёмкостным сопротивлением*, обозначается

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C}.$$

Мгновенная мощность, поступающая от источника электрической энергии в индуктивность:

$$p = u \cdot i = U_m \cdot \sin(\omega t) \cdot I_m \cdot \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U \cdot I \cdot \sin(2\omega t),$$

изменяется с угловой частотой  $2\omega$ , а среднее за период значение мощности или активная мощность  $P = 0$ . Энергия электрического поля конденсатора  $\hat{W}_C$  изменяется во времени по синусоидальному закону с угловой частотой  $2\omega$  от 0 до  $CU^2$

$$\hat{W}_C = C \cdot u^2 = \frac{C \cdot U_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{C \cdot U^2}{2 \cdot (1 - \cos 2\omega t)}.$$

При возрастании абсолютного значения мгновенного напряжения ток по направлению совпадает с напряжением и происходит процесс зарядки конденсатора  $p = u \cdot i > 0$ , и источник электрической энергии *совершает*

*положительную работу, энергия  $\hat{W}_C$  запасается* в электрическом поле конденсатора. При уменьшении абсолютного значения приложенного напряжения ток направлен против напряжения и происходит разрядка конденсатора  $p = ui < 0$ , энергия конденсатора электрического поля конденсатора возвращается источнику. Происходит непрерывное колебание энергии между источником электрической энергии и электрическим полем конденсатора, а полезная работа не совершается.

### Контрольные вопросы

1. Что такое идеальный элемент?
2. Особенности идеального элемента – активного сопротивления – в цепи переменного тока.
3. Особенности идеального элемента – индуктивности – в цепи переменного тока.
4. Особенности идеального элемента – емкости – в цепи переменного тока.
5. Как определить индуктивное сопротивление?
6. Как определить емкостное сопротивление?
7. В каких идеальных элементах цепи переменного тока возможна полезная работа, а в каких нет?

### 2.5 Последовательное соединение $R, L, C$ элементов

К цепи, состоящей из последовательно соединённых  $R, L, C$  элементов (рис.2.4), приложено синусоидальное напряжение  $u = U_m \cdot \sin(\omega t + \Psi_u)$ , где  $\Psi_u$  начальный фазный угол напряжения. При известных параметрах  $R, L, C$  требуется найти мгновенное значение тока  $i$ . В соответствии со вторым законом Кирхгофа для мгновенных значений напряжения имеем:

$$u = u_R + u_L + u_C,$$

где  $u_R = R \cdot i$ ,  $u_L = L \left( \frac{di}{dt} \right)$ ,

$u_C = \frac{1}{C} \int i \cdot dt$  – напряжения соответственно на  $R, L, C$ .

Подставив значения  $u_R, u_L, u_C$  в уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа, получим:

$$R \cdot i + L \left( \frac{di}{dt} \right) + \frac{1}{C} \int i \cdot dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

Решение этого уравнения представляет синусоидальную функцию времени такой же частоты, как и приложенное напряжение:

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i).$$

Задача определения мгновенного значения тока  $i$  сводится к определению его амплитуды  $I_m$  и начальной фазы  $\psi_i$ . Подставив  $i = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi_i)$  в выражения для  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $u_C$ , получим:

$$\begin{aligned} u_R &= R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i), \\ u_L &= \omega \cdot L \cdot I_m \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}) \\ u_C &= \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Изобразим соотношения между синусоидальными функциями на векторной диаграмме.

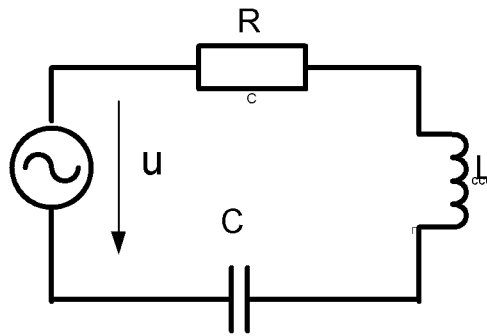


Рис. 2.5 Последовательное соединение идеальных  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементов

В произвольном направлении вправо от начала координат отложим вектор тока  $I$  и вектор напряжения  $U_R$ , совпадающий с вектором тока по направлению (рис.2.5). Вектор  $U_L$  опережает вектор тока  $I$  на  $+\pi/2$ , а вектор напряжения  $U_C$  отстает от вектора тока  $I$  на  $-\pi/2$ .

Сумма векторов  $U_R + U_L + U_C$  равна вектору  $U$ , приложенного к цепи напряжения [4,5]. Из прямоугольного треугольника  $\theta a b$  (рис.2) следует:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 = R^2 \cdot I^2 + (\omega L \cdot I - \frac{I}{\omega C})^2 \quad (2.1)$$

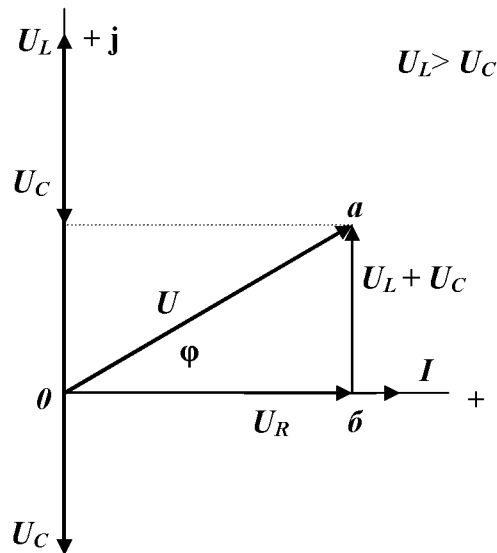


Рис. 2.6 Векторная диаграмма напряжений в цепи с последовательным соединением  $R$ ,  $L$ ,  $C$  идеальных элементов

Из (2.1) получим ток  $I = \frac{U^2}{\sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)}}$ .

Выражение в знаменателе имеет размерность сопротивления, обозначается  $Z$  и называется полным сопротивлением:

$$Z = \sqrt{(R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2)} \quad (2.2)$$

В случае, когда  $U_L \neq U_C$ , вектор тока  $I$  сдвинут относительно вектора, приложенного к цепи напряжения  $U$ , на угол  $\varphi$ . В электротехнической литературе угол  $\varphi$  принято всегда определять как разность между начальными фазными углами тока  $\Psi_i$  и напряжения  $\Psi_u$ . Угол  $\varphi$  положительный, если  $\Psi_u > \Psi_i$ , в этом случае ток отстает по фазе от напряжения, и отрицательный, когда  $\Psi_u < \Psi_i$ , т.е. ток опережает по фазе напряжение.

Из треугольника  $0ab$  получим:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctg \frac{(U_L - U_C)}{U_R} = \arctg \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right). \quad (2.3)$$

Из обозначений в (2.2) и (2.3) следует:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R}, X = \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = X_L - X_C.$$

Отношение действующего или амплитудного значения напряжения соответственно к действующему или амплитудному значению тока называется **полным** (или кажущимся) **сопротивлением** цепи  $\dot{Z}$ .

$$\dot{Z} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{\vec{U}}{\vec{I}} \quad (2.4)$$

Полное сопротивление равно модулю комплексного сопротивления. Аргумент комплекса сопротивления равен  $\varphi$  разности фазных углов напряжения и тока.

Полное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.4)  $\dot{Z}$  равно:

$$\dot{Z} = \dot{z} \cdot e^{j\varphi} = \dot{z} \cdot \cos \varphi + j \dot{z} \cdot \sin \varphi = R + jX, \quad (2.5)$$

где  $R = \dot{z} \cdot \cos \varphi$  – вещественная часть комплекса сопротивления, называется **активным сопротивлением**;

$X = \dot{z} \cdot \sin \varphi$  – мнимая часть комплекса сопротивления, называется **реактивным сопротивлением**.

Векторы напряжения индуктивности и емкости (рис.2.5) противоположны по фазе, поэтому в выражение для  $X$  реактивные сопротивления  $X_L$  и  $X_C$  входят с разными знаками. Напряжения на индуктивности и емкости сдвинуты по фазе относительно напряжения на активном сопротивлении на  $+\pi/2$  и  $-\pi/2$ .

Поэтому в комплекс сопротивления  $\dot{Z}$ , для цепи, содержащей  $R, L, C$ , они записываются как  $R, jX_L$  и  $jX_C$ .

При  $X_L = X_C$  имеем  $X = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\dot{z} = R$ , ток совпадает по фазе с напряжением, а цепь в целом проявляет свойства активного сопротивления, напряжения на индуктивности и ёмкости равны по величине и противоположны по фазе и могут **превысить внешнее напряжение, приложенное** к цепи. Такой случай называется **резонансом напряжений**. В зависимости от соотношений величин  $X_L$  и  $X_C$ ,  $\varphi$  может быть  $\varphi > 0$  ( $X = X_L - X_C > 0$ ), тогда ток отстаёт по фазе от напряжения (рис.2.5) или  $\varphi < 0$  ( $X = X_L - X_C < 0$ ), а ток опережает напряжение по фазе.

### Контрольные вопросы

1. Что является общим для последовательной цепи: ток или напряжения на элементах схемы?
2. Какими правилами необходимо пользоваться при построении векторной диаграммы?
3. Что такое активное сопротивление цепи?
4. Что такое реактивное сопротивление цепи?
5. Что такое полное сопротивление цепи?
6. Как взаимно расположены вектора напряжений на индуктивности и емкости? На активном сопротивлении?
7. Определите условие резонанса напряжений.

### 2.6 Мощность в цепи переменного тока

Для любой цепи синусоидального тока, содержащей пассивные, активные и реактивные элементы, напряжение и ток всегда сдвинуты по фазе относительно друг друга [1,2,3].

Пусть напряжение и ток на входе цепи

$$u = U_m \cdot \sin \omega t \quad \text{и} \quad i = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Мгновенное значение мощности в данный момент времени

$$\begin{aligned} p &= u \cdot i = U_m \cdot I_m \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \varphi) = \\ &= U \cdot I \cos \varphi - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Мощность (2.6) имеет две составляющие: постоянную составляющую  $U \cdot I \cos \varphi$  и переменную составляющую  $U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi)$ , угловая частота которой в два раза больше угловой частоты переменного тока.

Мощность равна нулю, когда равны нулю мгновенные значения тока  $i$  или напряжения  $u$ . Если  $\varphi \neq 0$ , то в течение каждого периода имеются промежутки времени, когда  $u$  и  $i$  имеют различные направления, и тогда мощность, поступающая в цепь, **отрицательная**, т.е. электрическая энергия **возвращается** из рассматриваемой цепи к источнику.

Возврат энергии источнику возможен, если энергия запасается в магнитном и электрическом полях рассматриваемой цепи.

Когда  $u$  и  $i$  имеют одинаковые направления, тогда мощность, поступающая в цепь, **положительная**, т.е. электрическая энергия **поступает** от источника к

рассматриваемой цепи.

**Активная мощность** равна постоянной составляющей мгновенной мощности и обозначается  $P = U \cdot I \cos \varphi$ .

Заводом-изготовителем электрические машины и аппараты рассчитываются для эксплуатации при определённых **номинальных** значениях тока и напряжения. Поэтому эти значения тока и напряжения определяют **номинальную мощность** или кажущуюся мощность, от которой зависят стоимость и размеры электрооборудования. Потому что активная мощность зависит от сдвига фаз между током и напряжением. **Кажущаяся мощность** равна произведению действующих значений тока и напряжения:  $S = U \cdot I$ .

Отношение активной мощности к кажущейся называется **коэффициентом мощности**. Коэффициент мощности равен косинусу угла сдвига фаз между напряжением и током:

$$\frac{P}{S} = \frac{U \cdot I \cdot \cos \varphi}{U \cdot I} = \cos \varphi \quad (2.6)$$

Для более экономичного использования электрооборудования стремятся к наиболее высокому коэффициенту мощности или к возможно меньшему сдвигу по фазе тока относительно напряжения. Наилучшее использование электрооборудования достигается при  $\cos \varphi = 1$ . Высокий коэффициент мощности необходим для уменьшения потерь при передаче электроэнергии по проводам. Ток в линии при определённой активной мощности  $P$  приёмника электроэнергии уменьшается при увеличении значения  $\cos \varphi$ ,

$$I = \frac{P}{U \cdot \cos \varphi}$$

Мощность потерь –  $\Delta P$  в сопротивлении проводов обратно пропорциональна квадрату коэффициента мощности приёмника электроэнергии.

$$\Delta P = R_{\text{лин}} \cdot I^2 = \frac{(R_{\text{лин}} \cdot P^2)}{(U^2 \cdot \cos^2 \varphi)} \quad (2.7)$$

Чем меньше  $\cos \varphi$ , тем дороже обходится снабжение потребителей электроэнергией, за счёт увеличения мощности потерь в проводах. Из выражения (2.7) видно, что уменьшение потерь в проводах достигается



передачей электроэнергии по линиям высокого напряжения, которое во много раз превышает напряжение потребителей. Поэтому электроэнергия передается по линиям с напряжением десятки киловольт при напряжении потребителей 220, 380 вольт.

## 2.7 Токи в цепи с параллельным соединением $R$ , $L$ , $C$ идеальных элементов

Для цепи (рис. 2.6) согласно первому закону Кирхгофа и закону Ома ток  $I$  в неразветвленной части цепи равен сумме векторов токов ветвей

$$I = I_R + I_L + I_C = \frac{U}{R} + \frac{U}{j\omega L} + \frac{U}{\left(-j\frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$= \left[ \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega C} - \omega C\right) \right] U.$$

Обозначим:

$$Y = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega C} - \omega C\right) = g - j(b_L - b_C), \quad (2.8)$$

где  $g = \frac{1}{R}$ ,  $b_L = \frac{1}{\omega L}$ ,  $b_C = \omega C$  и называются соответственно **активной**, **индуктивной** и **ёмкостной проводимостью** идеальных элементов. Результирующая реактивная проводимость рассматриваемой цепи  $b = b_L - b_C$ .

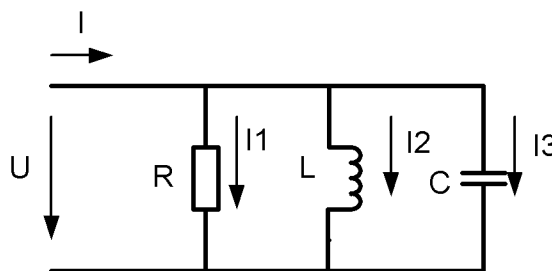


Рис. 2.7 Цепь с параллельным соединением  $R$ ,  $L$ ,  $C$  идеальных элементов

Выражение (2.7) для проводимости имеет такой вид, потому что каждая из параллельных ветвей содержит только по одному элементу. Для общего случая выражение для проводимости имеет более сложный вид. Для построения векторной диаграммы цепи, изображённой на рис. 2.8, в произвольном направлении вправо от начала координат отложим вектор напряжения  $U$ , и,

совпадающий с ним по направлению, вектор тока  $I_R$ . Вектор  $I_C$  опережает вектор напряжения  $U$  на  $+\pi/2$ , а вектор тока  $I_L$  отстает от вектора напряжения  $U$  на  $-\pi/2$ .

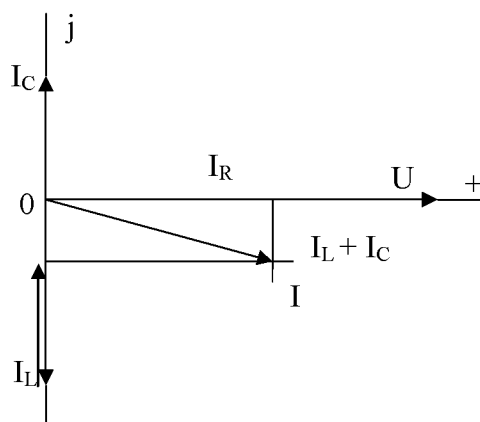


Рис. 2.8 Векторная диаграмма токов в цепи с параллельным соединением  $R, L, C$  идеальных элементов.

### Контрольные вопросы

1. Что означает термин «отрицательная мощность»?
2. Что такое активная мощность? Кажущаяся?
3. Дать определение коэффициенту мощности.
4. Почему необходимо стремиться к повышению  $\cos \varphi$  энергосистемы?
5. Что такое активная, индуктивная и емкостная проводимости?
6. Для параллельной цепи что является общим: напряжение или токи в параллельных ветвях?
7. Определите правила построения векторной диаграммы для параллельной цепи RLC.

## 2.8 Расчёт цепей однофазного синусоидального тока

### Цепь с последовательным соединением $R, L, C$ идеальных элементов.

Пусть для цепи (рис. 2.4) напряжения на элементах имеют следующие значения:

$$U_R = 4\text{В}, U_L = 8\text{В}, U_C = 5\text{В}.$$

Из векторной диаграммы (рис. 2.5) следует, что общее напряжение  $U$  на зажимах цепи определяется по теореме Пифагора из треугольника напряжений, образованного векторами напряжений  $U, U_R, (U_L - U_C)$ :

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 = 4^2 + (8 - 5)^2 = 25,$$

откуда следует, что напряжение  $U$  равно сумме векторов

$$U = U_R + U_L + U_C = 5\text{В.}$$

### Цепь с параллельным соединением $R$ , $L$ , $C$ идеальных элементов

Пусть для цепи (рис. 2.6) токи, протекающие через элементы, имеют следующие значения:

$$I_R = 3\text{А}, I_L = 6\text{А}, I_C = 2\text{А.}$$

Из векторной диаграммы (рис.2.7.) следует, что ток в неразветвленной части цепи равен сумме векторов токов ветвей и определяется из треугольника токов:

$$I^2 = I_R^2 + I_C - I_L)^2 = 3^2 + 6^2 = 25.$$

$$I = I_R + I_L + I_C = 5\text{А.}$$

### Цепь с последовательным соединением $R$ , $L$ , $C$ идеальных элементов

Для цепи (рис. 2.4) параметры элементов имеют следующие значения:  $R = 3$  Ом,  $X_C = 4$  Ом,  $X_L = 8$  Ом, к цепи приложено напряжение  $U = 20$  В.

Определить ток, протекающий по цепи.

Ток определяем из выражения (2.4)

$$I = \frac{U}{\dot{z}}.$$

Общее сопротивление  $\dot{z}$  в соответствии с (2.2, 2.3)

$$\dot{z} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{3^2 + (8 - 4)^2} = 5 \text{ Ом.}$$

$$\text{Получим численное значение тока } I = \frac{20\text{В}}{5\text{Ом}} = 4\text{А.}$$

### Контрольные вопросы

1. Как рассчитать индуктивное сопротивление?
2. Как рассчитать емкостное сопротивление?
3. Указать взаимное расположение векторов падений напряжений на комплексной плоскости в случае последовательного соединения RLC.
4. Как рассчитать индуктивную проводимость?
5. Как рассчитать емкостную проводимость?
6. Указать взаимное расположение векторов токов на комплексной плоскости в случае параллельного соединения RLC.
7. Как рассчитывается полное сопротивление в последовательной цепи? В параллельной?

## 2.9 Резонанс напряжений

Условием возникновения резонанса напряжений в последовательном RLC

– контуре является равенство реактивных сопротивлений катушки и конденсатора.

При  $x_L = x_C$  или  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  значения противоположных по фазе напряжений на индуктивности и на емкости равны, поэтому резонанс в рассматриваемой цепи называют резонансом напряжений.

Полное сопротивление  $z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$  последовательного контура при резонансе минимально и равно активному сопротивлению  $R$ .

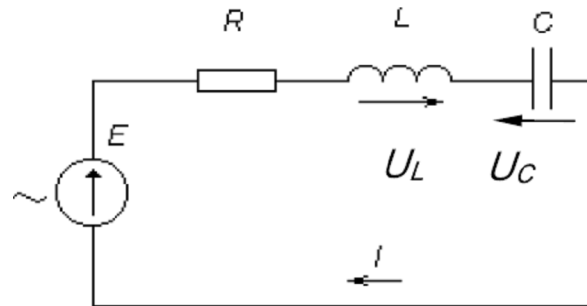


Рис. 2.8 Резонанс в последовательной цепи

Из закона Ома  $I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}}$  следует, что при  $x_L = x_C$  ток в контуре максимален и, ввиду чисто активного сопротивления цепи, совпадает по фазе с приложенным напряжением:  $I = \frac{U}{R}$ ,  $U = I \cdot R = U_R$ .

Напряжение на индуктивности и на емкости равны и в  $Q$  раз превышают приложенное напряжение:

$$\frac{U_C}{U} = \frac{U_L}{U} = Q. \quad (2.9)$$

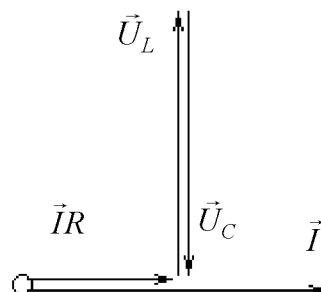


Рис. 2.9 Векторная диаграмма при резонансе напряжений

Величина  $Q$  называется добротностью контура и показывает во сколько раз напряжение на реактивном (индуктивном или емкостном) элементе

превышает напряжение на входе схемы в резонансном режиме. В радиотехнических устройствах  $Q$  может достигать 300 и более.

Для добротности контура можно записать также следующие соотношения:

$$Q = \frac{U_L}{U_R} = \frac{x_L}{R} = \frac{x_C}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где  $\rho$  – волновое (характеристическое) сопротивление контура:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\omega_0 \cdot L \cdot \frac{1}{\omega_0 \cdot C}} = Q \cdot R.$$

Угловая частота, при которой наступает резонанс, называется резонансной угловой частотой  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ , а частота, при которой возникает резонанс, –

соответственно резонансной частотой  $f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$ .

Рассмотрим частотные характеристики последовательного контура, то есть характер изменения ёмкостного и индуктивного сопротивлений при изменении частоты питающего напряжения.

Графики этой зависимости приведены на рис. 2.10.

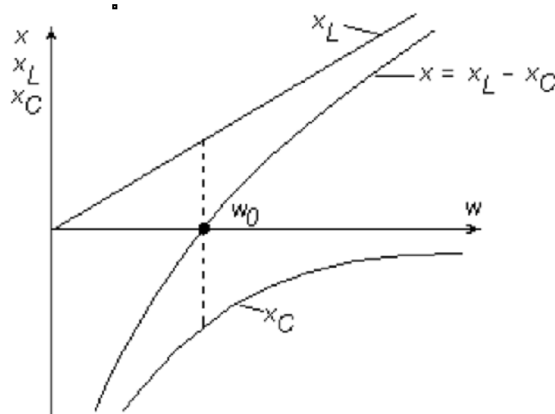


Рис. 2.10 Зависимости индуктивных и емкостных сопротивлений от частоты

Ёмкостное сопротивление  $x_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$  при увеличении частоты уменьшается от бесконечности до нуля по закону обратной пропорциональности.

Индуктивное сопротивление  $x_L = \omega \cdot L$  при увеличении частоты увеличивается от нуля до бесконечности прямо пропорционально  $\omega$ .

Как видно из рисунка, при увеличении частоты от 0 до  $\omega_0$  реактивное сопротивление  $x = x_L - x_C$  имеет емкостной характер и изменяется от  $-\infty$  до 0. Вследствие этого ток в цепи возрастает от 0 до  $I_{\max}$ , а угол сдвига фаз между напряжением и током изменяется от  $-\frac{\pi}{2}$  до 0. Дальнейшее увеличение частоты от  $\omega_0$  до  $\infty$  приводит к увеличению реактивного сопротивления  $x$  от 0 до  $\infty$ , которое будет иметь индуктивный характер.

В результате ток уменьшается от  $I_{\max}$  до 0, а угол  $\varphi$  возрастает от  $\frac{\pi}{2}$  до 0.

При этом напряжение  $U_R = R \cdot I$  изменяется пропорционально току.

Важно отметить, что максимум напряжения на конденсаторе имеет место при частоте немного ниже резонансной, а на индуктивности – при частоте немного выше резонансной. Это можно наблюдать по следующим формулам.

$$U_C = \max \quad \text{при:} \quad \omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}};$$

$$U_L = \max \quad \text{при:} \quad \omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}}};$$

$$\omega_L \cdot \omega_C = \omega_0^2.$$

Колебательный контур обладает ещё одним замечательным свойством – избирательностью.

Свойство контура выделять и усиливать сигналы определённой частоты и частот, близких к ней, называется избирательностью.

Для оценки избирательных свойств цепи вводят условное понятие ширины резонансной кривой или полосы пропускания контура, которую определяют как разность верхней и нижней частот, в пределах которых величина мощности в резисторе  $R$  составляет не менее 50 % от мощности при резонансе:

$$\frac{P}{P_1} \geq \frac{1}{2}.$$

На рис. 2.11 приведена резонансная кривая контура. Из рисунка видно, что чем выше добротность, тем уже полоса пропускания контура.

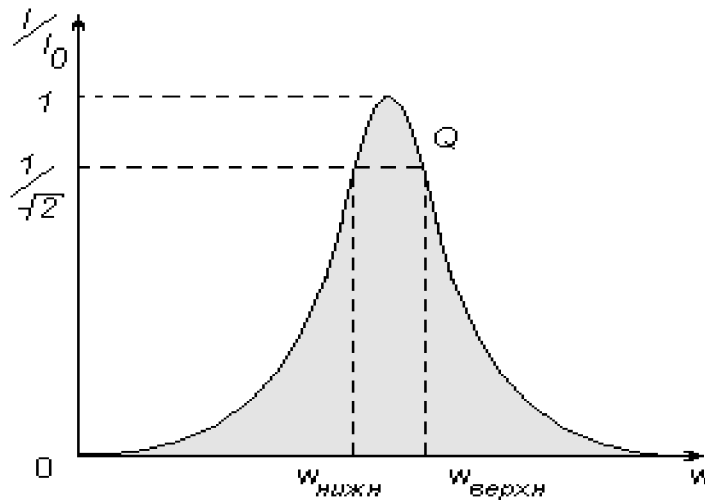


Рис. 2.11 Кривая добротности контура и его полоса пропускания

### Контрольные вопросы

1. Назовите условие возникновения резонанса напряжений.
2. Чему равно полное сопротивление последовательного контура при резонансе?
3. Что такое добротность контура?
4. Что такое волновое сопротивление контура?
5. Приведите графики зависимости индуктивного и емкостного сопротивления от частоты.
6. Дать определение резонансной частоте.
7. Что такое полоса пропускания контура?

### 2.10 Резонанс токов

Рассмотрим цепь с двумя параллельными ветвями на рис. 2.12.

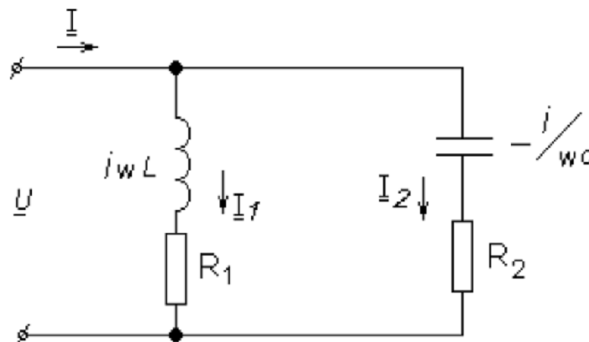


Рис. 2.12 Резонанс в параллельной цепи

Такую цепь часто называют параллельным контуром. Условием возникновения резонанса является равенство реактивных проводимостей:

$$b_L = -b_C,$$

$$b = \frac{x}{R^2 + x^2},$$

$$\frac{\omega_0 \cdot L}{R_1^2 + (\omega_0 \cdot L)^2} = \frac{1/\omega_0 \cdot C}{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 \cdot C}\right)^2}.$$

При  $b_L = -b_C$  противоположные по фазе реактивные составляющие токов равны, поэтому резонанс в рассматриваемой цепи получил название резонанса токов.

Из векторной диаграммы на рис. 2.13 а видно, что при резонансе ток на выходных выводах контура может быть значительно меньше токов в отдельных ветвях.

При резонансе общий ток в параллельном контуре по фазе совпадает с приложенным напряжением.

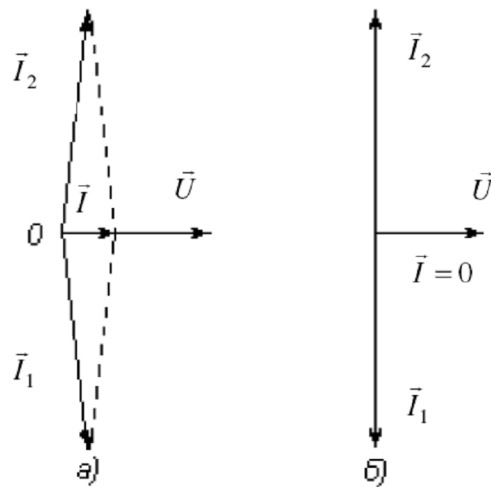


Рис. 2.13 Векторная диаграмма резонанса токов

Добротность контура показывает во сколько раз ток в ветви превышает питающий ток и определяется следующим соотношением:

$$Q = \frac{I_{L0}}{I} = \frac{I_{C0}}{I} \approx \frac{R_{Э0}}{\rho},$$

где  $\rho = \frac{L}{C} = \frac{U_0}{I_{L0}} = \frac{U_0}{I_{C0}} = x_C = x_L,$



$R_{\text{Э0}}$  – эквивалентное активное сопротивление при резонансе:

$$R_{\text{Э0}} \approx \frac{R_L \cdot x_{C0} + R_C \cdot x_{L0}}{(R_L + R_C)^2}, \text{ если } R_L < x_L \text{ и } R_C < x_C .$$

В общем случае резонансная частота  $\omega'_0$  определяется по формуле:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}, \quad (2.10)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  – резонансная угловая частота при  $R_1 = R_2 \neq \rho$  – аналогичная последовательному контуру.

В теоретическом случае при  $R_1 = R_2 = 0$  токи  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$  сдвинуты по фазе относительно напряжения на углы  $+\frac{\pi}{2}$  и  $-\frac{\pi}{2}$  (рис. 2.13б) и суммарный ток  $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$ .

Входное сопротивление цепи при этом бесконечно велико  $\omega^2 \cdot L \cdot C = 1$ .

Как видно из формулы (2.10), резонанс возможен, если сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  оба больше или оба меньше  $\rho$ .

Если  $R_1 = R_2 = \rho$ , то резонансная частота  $\omega'_0 = \frac{0}{0}$  имеет любое значение, то есть резонанс наблюдается на любой частоте.

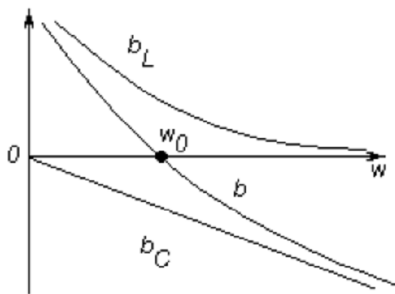


Рис. 2.14 Зависимость индуктивной и емкостной проводимости от частоты

На рис. 2.14 показаны частотные характеристики проводимостей ветвей  $b_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$  и  $b_C = \omega \cdot C$ , и входной проводимости цепи  $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C$ .

При изменении частоты от 0 до  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  эквивалентная проводимость  $b > 0$ , то есть индуктивная изменяется от  $\infty$  до 0. При  $\omega = \omega_0$  наступает резонанс токов,  $b = 0$ ,  $I = 0$ ,  $I_L = \frac{U}{\rho}$ ,  $I_C = \frac{U}{\rho}$ .

При возрастании частоты от  $\omega_0$  до  $\infty$  входная проводимость  $b < 0$ , то есть схема имеет емкостной характер.

## Контрольные вопросы

1. Назовите условие возникновения резонанса токов.
2. Чему равно полное сопротивление параллельного контура при резонансе?
3. Что такое добротность параллельного контура?
4. Приведите графики зависимости индуктивной и емкостной проводимости от частоты.
5. Дать определение резонансной частоте.
6. Что такое полоса пропускания контура?
7. Какой характер (индуктивный или емкостной) носит параллельная цепь на частоте ниже резонансной? При резонансе? На частоте, выше резонансной?

## 2.11 Комплексные числа. Основные законы электротехники в комплексной форме

### 2.11.1 Способы изображения синусоидальных величин

#### Графическое изображение синусоидальных величин.

Для сравнения электрических величин, изменяющихся по синусоидальному закону, необходимо знать разность их начальных фаз. Если, например, на каком-либо участке ток  $i$  и напряжение  $u$  имеют одинаковые начальные фазы, говорят, что они совпадают по фазе. Если график изменения во времени напряжения  $u$  на каком-либо участке цепи пересекает координату времени  $t$  раньше графика тока  $i$ , то говорят, что напряжение по времени опережает ток.

На рис. 2.15 для заданного элемента цепи представлены графики изменения во времени двух электрических величин: напряжения  $u$  и тока  $i$ . Из этих двух графиков видно, что они сдвинуты по фазе друг относительно друга на угол  $\varphi$ .

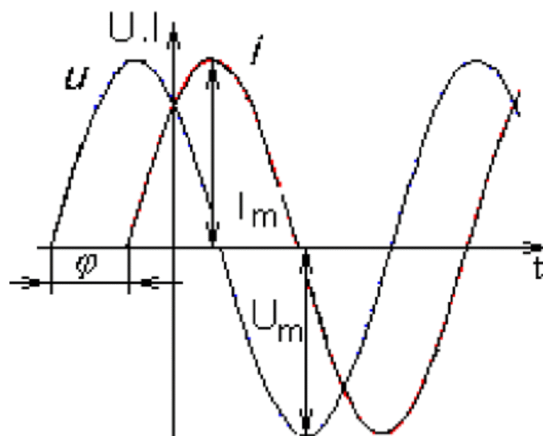


Рис. 2.15 Синусоидальные величины тока и напряжения

Векторное изображение синусоидальных величин.

При гармоническом изменении синусоидальной величины постоянной остаётся амплитуда. Этим можно воспользоваться для определения мгновенного значения электрической величины, не рассматривая графика её зависимости от времени.

Синусоидальную функцию времени можно изобразить вектором, равным амплитуде данной функции, равномерно вращающимся с угловой скоростью  $\omega$ . При этом начальное положение вектора определяется (для  $t = 0$ ) его начальной фазой  $\psi_i$ .

На рис. 2.16 показаны вращающийся вектор тока  $I_m$  и график изменения тока  $i$  во времени.

При изображении синусоидальной э.д.с., напряжений и токов из начала координат проводят векторы, равные амплитудным значениям этих величин, под углом  $\psi$  к горизонтальной оси. Положительные углы  $\psi$  откладываются против часовой стрелки.

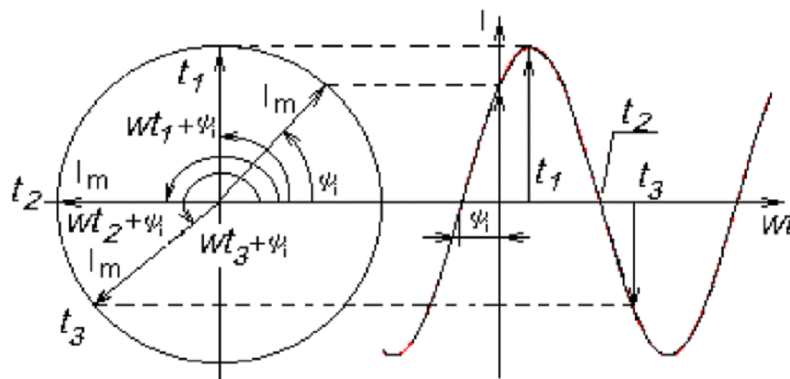


Рис. 2.16 Вектор тока и график изменения тока во времени

Если вращать вектор против часовой стрелки, то в любой момент времени он составит с горизонтальной осью угол, равный  $\omega t + \psi$ . Проекция вращающегося вектора на ось ординат (ось мгновенных значений) равна мгновенному значению синусоидальной величины.

Совокупность векторов на плоскости, изображающих э.д.с., напряжения, токи одной частоты, называют векторной диаграммой.

При исследовании установившихся режимов векторы неподвижны, их длина равна действующим значениям электрических величин.

С помощью векторов можно производить геометрическое суммирование электрических величин.

Так, на рис. 2.17 показаны векторы токов  $\vec{I}_1$  и  $\vec{I}_2$ , а также вектор их геометрической суммы  $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = 0$ . Углы  $\psi_1, \psi_2, \psi$  обозначают начальные фазы токов.

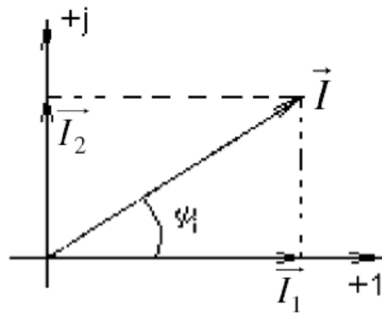


Рис. 2.17 Суммирование векторов

Векторные диаграммы широко используются при анализе электрических цепей переменного тока.

### Представление синусоидальных величин комплексными числами.

Синусоидально изменяющуюся электрическую величину можно представить комплексным числом и изобразить в виде вектора на комплексной плоскости с прямоугольной системой координат.

Комплексное число состоит из действительной (вещественной) и мнимой частей. По оси ординат откладывают мнимую часть комплексного числа, а ось обозначают  $+j$ ; по оси абсцисс – действительную часть комплексного числа, а ось обозначают  $+1$ .

На комплексной плоскости синусоидальная величина может изображаться в виде модуля и аргумента или в виде двух составляющих вектора, направленных по действительной и мнимой осям.

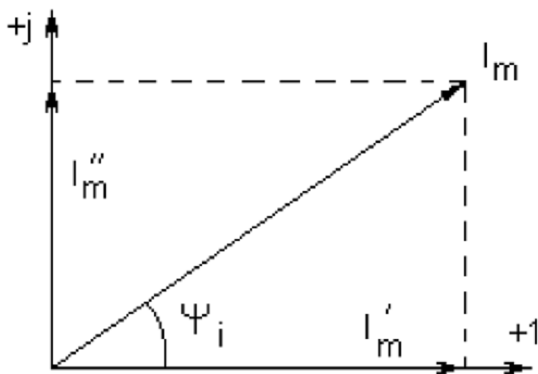


Рис. 2.18 Разложение вектора тока на действительную и мнимую части

Например, синусоидальный ток  $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$  представляют вектором  $\vec{I}_m$ , модулем которого является значение амплитуды тока  $I_m$ , а аргументом – начальная фаза  $\psi_i$ , которую можно выразить в радианах или в градусах (рис. 2.18).

Составляющим вектора  $\vec{I}_m$  по действительной оси будет  $I'_m$ , а по мнимой –  $I''_m$ , то есть

$$I_m = I'_m + jI''_m = I_m \cdot \cos \psi_i + jI_m \cdot \sin \psi_i.$$

Вектор  $\vec{I}_m$  называют комплексной амплитудой тока.

Обычно при расчётах пользуются действующими значениями.

При построении векторных диаграмм точно фиксируют угол сдвига между векторами, а положение их относительно осей комплексной плоскости может быть произвольным, поэтому оси можно не изображать.

$$\text{Обозначим } a = I_m \cdot \cos \psi_i, \quad b = I_m \cdot \sin \psi_i$$

$$\text{Тогда } \vec{I} = a + jb.$$

Полученной формой записи удобно пользоваться при сложении и вычитании векторов.

$$\text{Пусть } \vec{I}_1 = a_1 + jb_1, \quad \vec{I}_2 = a_2 + jb_2.$$

$$\text{Тогда } \vec{I}_1 + \vec{I}_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

При анализе электрических цепей переменного тока приходится иметь дело с умножением и делением электрических величин. В этом случае удобно пользоваться комплексами этих величин, записанными в показательной форме:

$$\vec{I} = Ie^{j\psi_i}; \quad \vec{U} = Ue^{j\psi_i},$$

где  $e^{j\psi_i}$  – оператор поворота единичного вектора относительно оси действительных величин.

$$\text{Пусть } \vec{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}; \quad \vec{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}.$$

$$\text{Их произведение } \vec{I}_1 \vec{I}_2 = I_1 e^{j\psi_1} \cdot I_2 e^{j\psi_2} = I_1 I_2 e^{j(\psi_1 + \psi_2)}.$$

Умножение на  $j$  означает поворот вектора на  $+90$  градусов (в сторону, противоположную направлению движения стрелки часов).

Умножение на  $-j$  означает поворот вектора на угол  $-90$  градусов (по часовой стрелке).

$$\text{Например, при } I = 1A, \quad Ie^{j0} = 1, \quad Ie^{j\frac{\pi}{2}} = +j, \quad Ie^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$$

### 2.11.2 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме

Уравнение (3.9) представляет собой закон Ома для цепи синусоидального тока в комплексной форме

$$\vec{U}_m = \vec{I}_m \cdot \vec{Z},$$

где  $\vec{Z}$  – комплексное сопротивление, Ом.

В общем случае  $\vec{Z}$  имеет некоторую действительную часть  $R$  и некоторую мнимую часть  $jX$ ,

$$\vec{Z} = R + jX. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) можно записать иначе.

Разделим обе его части на  $\sqrt{2}$  и перейдем от комплексных амплитуд  $\vec{I}_m$  и  $\vec{U}_m$  к комплексам действующих значений  $\vec{I}$  и  $\vec{U}$ .

По первому закону Кирхгофа, алгебраическая сумма мгновенных значений токов, сходящихся в любом узле схемы, равна нулю:

$$\sum i_k = 0.$$

Подставив вместо  $i_k$  выражение  $I_k e^{j\psi}$  и вынеся  $e^{j\psi}$  за скобку, получим  $e^{j\psi} \sum \vec{I}_k = 0$ . Таким образом,

$$\sum_{k=1}^n \vec{I}_k = 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) представляет первый закон Кирхгофа в комплексной форме.

Для замкнутого контура сколь угодно сложной электрической цепи синусоидального тока можно составить уравнение по второму закону Кирхгофа и представить в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \vec{I}_k \cdot \vec{Z}_k = \sum_{k=1}^n \vec{U}_k.$$

### 2.11.3 Выражение мощности в комплексной форме записи

Пусть задан некоторый комплекс.

$$A = Ae^{j\psi_A} = A \cos \psi_A + jA \sin \psi_A.$$

Под комплексом  $\hat{A}$ , сопряженным с комплексом  $\vec{A}$ , будем понимать

$$\hat{A} = Ae^{-j\psi_A} = A \cos \psi_A - jA \sin \psi_A.$$

Рассмотрим прием определения активной и реактивной мощностей через комплекс напряжения и сопряженный комплекс тока. Напряжение на некотором участке цепи обозначим через  $\vec{U} = Ue^{j\psi_u}$ , ток по этому участку  $\vec{I} = Ie^{j\psi_i}$ . Угол между напряжением и током  $\psi = \psi_u - \psi_i$ . Умножим комплекс напряжения на сопряженный комплекс тока  $\hat{I} = Ie^{-j\psi_i}$  и обозначим полученный комплекс через  $\vec{S}$ .

$$\vec{S} = \vec{U}\hat{I} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\psi} = UI \cos \psi + jUI \sin \psi.$$

Таким образом, активная мощность  $P$  есть действительная часть, а реактивная  $Q$  – мнимая часть произведения  $\vec{U}\hat{I}$ , а полная мощность выразится как  $\vec{S} = \vec{U}\hat{I}$ .

### **Выводы**

Первый и второй законы Кирхгофа выполняются как для цепей постоянного тока, так и для цепей переменного синусоидального тока. Однако, при расчете электрического состояния цепей необходимо учитывать: что для **цепей постоянного тока** при составлении уравнений по законам Кирхгофа рассчитывается **алгебраическая сумма** токов или напряжений, а для **цепей синусоидального тока** определяется их **векторная сумма**. Элементы цепей постоянного тока характеризуются параметром  $R$ , который называется сопротивлением и определяется по закону Ома. Элементы цепей переменного синусоидального тока характеризуются полным или кажущимся сопротивлением  $Z$ , которое содержит активную составляющую –  $R$  и реактивную составляющую –  $X$ .

### **Контрольные вопросы**

1. Как математически изображаются синусоидальные функции?
2. Как графически можно изобразить две синусоидальные величины?
3. Как векторно можно изобразить две синусоидальные величины?
4. Что такое векторная диаграмма?
5. Что такое комплексная плоскость?
6. Как на комплексной плоскости может изображаться синусоидальная величина?
7. Какая форма изображения комплексного числа более удобна при сложении векторов? При умножении?
8. Сформулируйте закон Ома в комплексной форме.
9. Сформулируйте законы Кирхгофа в комплексной форме.
10. Как выражается мощность в комплексной форме записи?

### 3. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

#### 3.1 Трехфазная система э.д.с.

В предыдущей главе рассматривалась работа электрических цепей, питающихся от однофазных синусоидальных источников тока или напряжения. Наряду с однофазными источниками существуют источники энергии, количество фаз у которых составляет два, три, четыре и т.д., и которые характеризуются тем, что ЭДС этих фаз имеют одинаковую частоту, но сдвинуты друг относительно друга на некоторую одинаковую фазу. Такие генераторы называются многофазными и электрические цепи с такими источниками называются многофазными.

#### *Трехфазный генератор*

Среди всего многообразия многофазных источников трехфазный получил наибольшее практическое применение. В связи с этим основные исследования многофазных цепей будем проводить на примере трехфазных цепей. И в связи с этим рассмотрим вопрос реализации такого трехфазного источника, которым является трехфазный генератор.

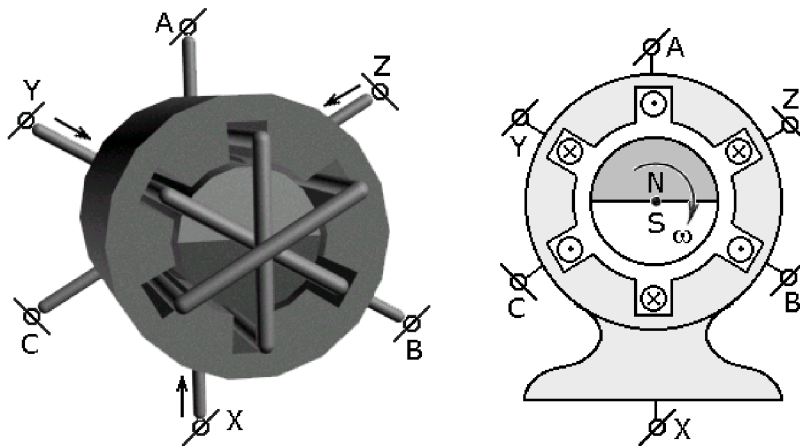


Рис. 3.1 Трехфазный генератор

В целях упрощения понимания принципа работы генератора обмотки представлены одним витком. В качестве ротора генератора выбран постоянный магнит. Каждая из обмоток имеет начало – клеммы  $A, B, C$  и конец –  $X, Y, Z$ . Обмотки в пространстве сдвинуты на  $120^\circ$  относительно друг друга. Из чего следует, что максимумы ЭДС в них достигаются в разные моменты времени, отстающие друг от друга на одну треть периода  $T = 2\pi / \omega$ , где  $\omega$  – угловая частота вращения ротора.



Последовательность, в которой э.д.с. достигают максимума в соответствующих фазах, носит название порядка чередования фаз. Прямым порядком чередования фаз называют последовательность, при которой фаза  $B$  отстает от фазы  $A$  на  $1/3T$ , и фаза  $C$  отстает от фазы  $B$  на  $1/3T$  – т.е.  $A, B, C$ . На рис. 3.2 изображен график мгновенных значений ЭДС для прямого порядка чередования фаз. Изменение направления вращения ротора на противоположное меняет эту последовательность чередования фаз и она станет  $A, C, B$ .

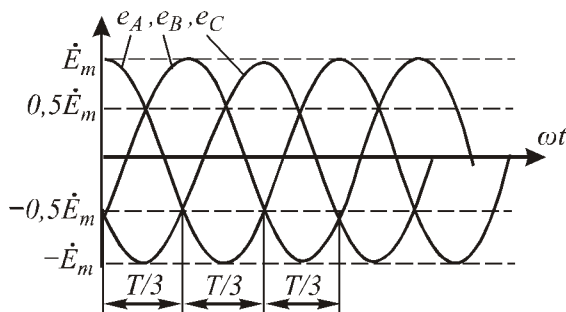


Рис. 3.2 Графики мгновенных э.д.с. фаз  $A, B, C$

$$\begin{aligned} e_A &= E_m \sin(\omega t + \pi/2); \\ e_B &= E_m \sin(\omega t + \pi/2 - 2\pi/3); \\ e_C &= E_m \sin(\omega t + \pi/2 - 2\pi/3 - 2\pi/3). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку ЭДС каждой фазы генератора синусоидальна, то им в соответствие можно на комплексной плоскости построить векторы фазных ЭДС  $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$

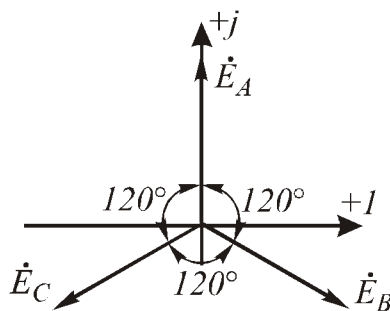


Рис. 3.3 Векторная диаграмма фазных э.д.с.

Важным обстоятельством является то, что система векторов фазных э.д.с. генератора на комплексной плоскости образует симметричную трехлучевую звезду, и сумма этих векторов в любой момент времени равна нулю.

При подключении к каждой из фаз генератора нагрузки по ней будет протекать ток. Таким образом, образуется трехфазная система.

### Контрольные вопросы

1. Конструкция трехфазного генератора.
2. Что представляет собой система трехфазных э.д.с.
3. Возможны ли системы с иным числом фаз?
4. Чему равна сумма векторов в симметричной трехфазной системе э.д.с.?
5. На сколько градусов сдвинуты вектора относительно друг друга в симметричной трехфазной системе? В четырехфазной?
6. Что является источником поля в трехфазном генераторе?
7. Что такое последовательность чередования фаз? Как ее изменить?

### 3.2 Соединение фаз генератора и нагрузки «звездой»

Генератор и приемник могут быть соединены «звездой» или треугольником. Это два основных способа соединения фаз генератора и приемника.

#### *Соединение фаз генератора и приемника четырехпроводной «звездой»*

При соединении фаз генератора «звездой» все концы или начала соединяют в одну общую точку. На рис. 3.4.а показана несвязанная трехфазная система, в которой каждая фаза генератора и приемника образует отдельную электрическую цепь, и поэтому для связи генератора и приемника требуется 6 проводов. При соединении «звездой» количество проводов уменьшится до 4-х. Причем провод, соединяющий общие (нейтральные или нулевые) точки фаз генератора  $N$  и приемника  $n$  называется нейтральным или нулевым и, соответственно, ток, протекающий по этому проводу  $\dot{I}_N$ , называется нулевым или нейтральным. Остальные провода, соединяющие фазы генератора и приемника, называются линейными.

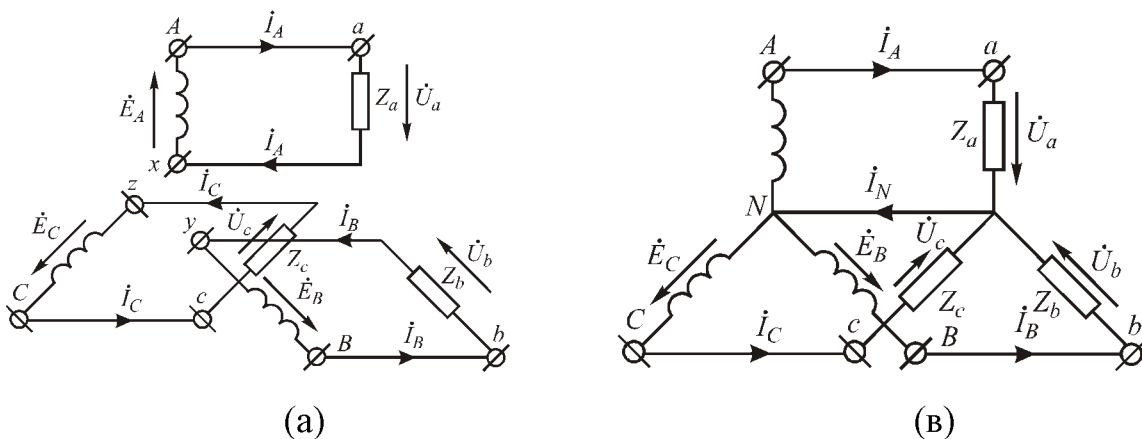


Рис. 3.4 Соединение «звездой»

Токи, протекающие по фазам генератора или приемника, называются фазными токами.

Токи, протекающие по проводам, соединяющим генератор и приемник, называются линейными.

Напряжение между началом и концом фазы генератора или приемника называется фазным.

Напряжение между двумя фазами или линиями называется линейным.

Для этого способа соединения между линейными и фазными параметрами цепи существуют следующие соотношения:

$$\dot{I}_\phi = \dot{I}_л. \quad (3.2)$$

Установим взаимосвязь между комплексами линейных и фазных напряжений источника (рис. 3.5). В дальнейших рассуждениях фазные ЭДС заменим напряжениями на фазах источника.

$$\dot{U}_A - \dot{U}_{AB} - \dot{U}_B = 0;$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

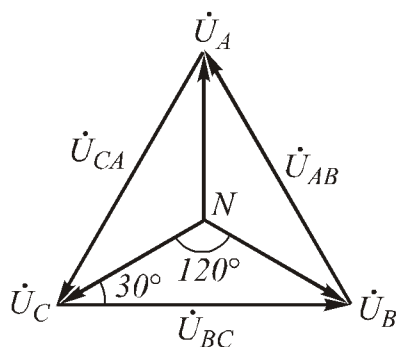


Рис. 3.5 Топографическая диаграмма фазных и линейных напряжений

Выберем любой равнобедренный треугольник, образованный двумя фазными и линейным напряжениями, и опустим перпендикуляр из вершины  $N$  на основание. Перпендикуляр является медианой и биссектрисой.

Из любого прямоугольного треугольника получим:

$$\frac{U_{л}}{2} = U_{\phi} \cos 30^{\circ} = U_{\phi} \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е.

$$U_L = \sqrt{3}U_\phi. \quad (3.3)$$

Частным случаем такого соединения является соединение «звезда-звезда» без нулевого провода.

### Контрольные вопросы

1. Что такое нейтральный провод?
2. Что такое фазные токи?
3. Что такое линейные токи?
4. Что такое фазные напряжения? Линейные?
5. Какие соотношения между линейными и фазными напряжениями в звезде?
6. Как получить соединение обмоток «звездой»?
7. Как определить ток в нейтральном проводе?

### 3.3 Соединение фаз генератора и приемника «треугольником»

Вторым основополагающим способом соединения является соединение типа «треугольник-треугольник».

Для соединения «треугольником» существует следующее соотношение:

$$U_L = U_\phi \quad (3.4)$$

Установим взаимосвязь между фазными и линейными токами:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}$$

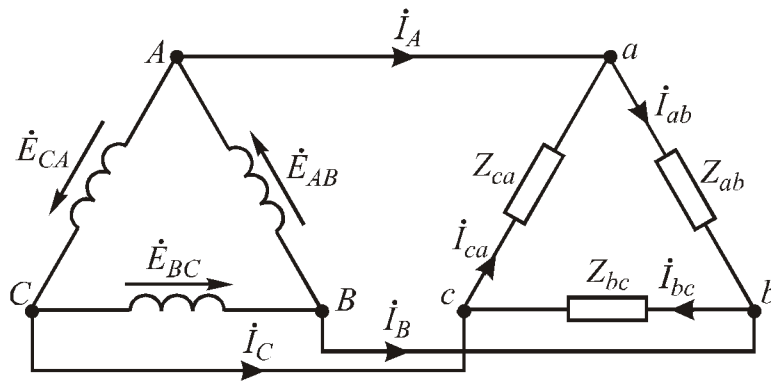


Рис. 3.6 Соединение «треугольник-треугольник»

Построим векторную диаграмму токов и напряжений приемника (рис.3.7).

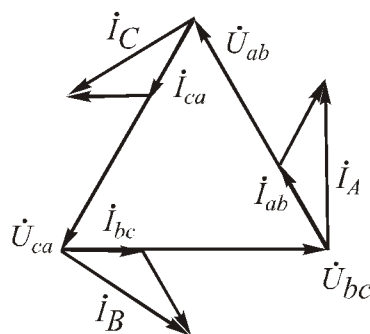


Рис. 3.7 Векторная диаграмма трехфазной цепи при соединении приемников «треугольником» при симметричной нагрузке

Рассмотрев любой треугольник токов, можно аналогично напряжениям при соединении «звездой», сделать вывод (только для симметричной нагрузки):

$$\dot{I}_L = \sqrt{3}\dot{I}_\phi \quad (3.5)$$

Помимо вышеназванных существуют и комбинированные способы соединения: «звезда-треугольник», «треугольник-звезда».

### 3.4 Соединение «звезда-звезда» с нулевым проводом и без него

Поскольку трехфазные цепи являются совокупностью однофазных цепей, то для их расчета используются все рассмотренные методы, в том числе и комплексный метод расчета. А значит, расчет трехфазных цепей можно иллюстрировать построением векторных диаграмм токов нагрузки и топографических диаграмм напряжений.

Наиболее рациональным методом расчета цепи может считаться метод двух узлов. Для выбранных положительных направлений напряжений и токов на схеме (рис. 3.8) составим соответствующую систему уравнений для расчета токов:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN})Y_a; \\ \dot{I}_B &= (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN})Y_b; \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\dot{I}_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN})Y_c;$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C; \quad (3.7)$$

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A Y_a + \dot{U}_B Y_b + \dot{U}_C Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_N}; \quad (3.8)$$

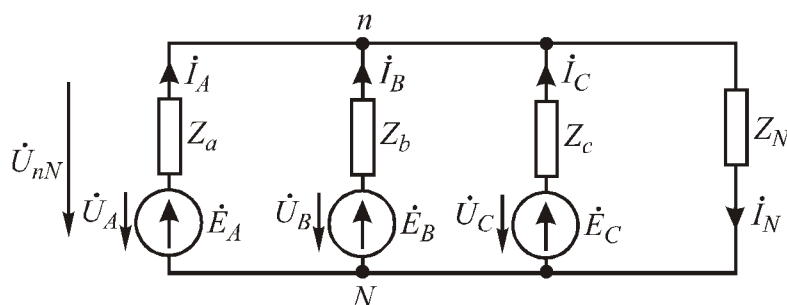


Рис. 3.8 Соединение фаз генератора и приемника по схеме «четырёхпроводная звезда»

### Контрольные вопросы

1. Что означает соединение «треугольником»?
2. Какое соотношение между линейными и фазными напряжениями в треугольнике?
3. Какое соотношение между линейными и фазными токами в треугольнике?
4. Если обмотки генератора соединены треугольником, а он работает на холостом ходу, течет ли ток внутри треугольника?
5. Возможны ли комбинированные соединения генератора и нагрузки, а именно: «треугольник-звезда» и «звезда-треугольник»?
6. Построить векторную диаграмму при соединении нагрузки «треугольником».
7. Что такое «четырёхпроводная звезда»?

## 3.5 Режимы работы трехфазных цепей

### 3.5.1 Симметричная нагрузка

Нагрузка считается симметричной, если комплексные сопротивления ее фаз равны:  $Z_a = Z_b = Z_c$ .

#### а) четырёхпроводная звезда

Для простоты в качестве сопротивлений фаз нагрузки будем рассматривать активные сопротивления ( $Z_a = Z_b = Z_c = Z_\phi = R_\phi$ ). Наличие нулевого провода делает одинаковыми потенциалы узлов  $N$  и  $n$  ( $Y_N = \infty$ ), значит  $U_{nN} = 0$ . При этом фазные токи равны, а фазные напряжения на нагрузке будут полностью повторять фазные напряжения генератора. Для фазы  $A$ :

$$\dot{I}_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN})Y_a \Rightarrow \dot{I}_A = \dot{U}_A Y_a \Rightarrow \dot{U}_a = \dot{I}_A R_a = \dot{U}_A.$$

Аналогично для фаз  $B$  и  $C$ :

$$\begin{aligned}\dot{I}_B &= \dot{U}_B Y_b; \\ \dot{I}_C &= \dot{U}_C Y_c; \\ \dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;\end{aligned}$$

Исходя из сказанного, построим топографическую диаграмму фазных напряжений и векторную диаграмму токов:

**в) трехпроводная звезда.**

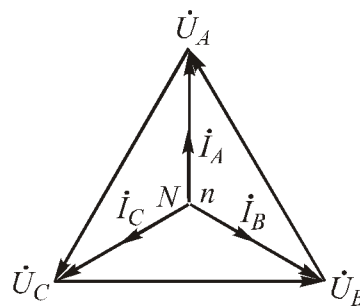


Рис. 3.9 Векторная диаграмма для симметричной нагрузки в трех- и четырехпроводной схеме

$$\begin{aligned}Z_N &= \infty; Y_N = 0; \\ \dot{U}_{nN} &= \frac{g_\phi(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3g_\phi} = 0.\end{aligned}$$

Поэтому, как и в четырехпроводной схеме, фазы приемника работают независимо друг от друга и нулевой провод не нужен. Диаграмма в данном случае будет абсолютно той же самой.

### 3.5.2 Несимметричная нагрузка

Пусть  $R_a \neq R_b = R_c$ ;

**а) четырехпроводная звезда**

$$\begin{aligned}\dot{U}_{nN} &= 0; \\ \dot{I}_A &= \dot{U}_A Y_a; \\ \dot{I}_B &= \dot{U}_B Y_b;\end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_C Y_c;$$

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C \neq 0.$$

На векторно-топографической диаграмме токов и напряжений (рис. 3.10) показано сложение токов.

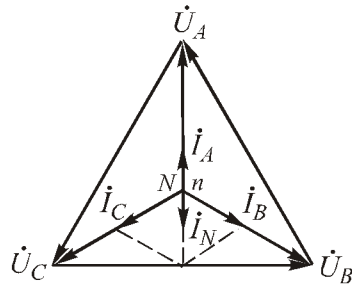


Рис. 3.10 Векторно-топографическая диаграмма для несимметричной нагрузки

**б) трехпроводная звезда.**

Из-за неравенства проводимостей ветвей  $\dot{U}_{nN} \neq 0$ , то есть между точками  $n$  и  $N$  появляется некоторая разность потенциалов, так называемое смещение нейтрали. При этом фазные напряжения на нагрузках уже не будут повторять систему фазных напряжений генератора. Поэтому задача сводится к задаче определения положения точки  $n$  на комплексной плоскости относительно  $N$ . Для его определения можно воспользоваться формулой узлового напряжения и теоретически ее рассчитать. Однако можно это сделать, основываясь на экспериментальных данных, суть которых состоит в следующем: производят измерения реальных значений напряжений на фазах нагрузки; в выбранном масштабе для напряжений проводят дуги окружностей радиусами, равными измеренным фазным напряжениям, из точек  $A, B, C$ . Точка пересечения этих трех дуг и даст искомое местоположение точки  $n$  внутри треугольника, ограниченного линейными напряжениями (рис. 3.11).

Соединив точки  $n$  и  $N$  отрезком, получим смещение нейтрали. По найденным фазным напряжениям приемника направляем векторы токов. Должно выполняться равенство:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

По результатам выполненных построений можно сделать главный вывод: если заведомо известно, что нагрузка несимметрична или может таковою стать, необходимо использовать четырехпроводную схему



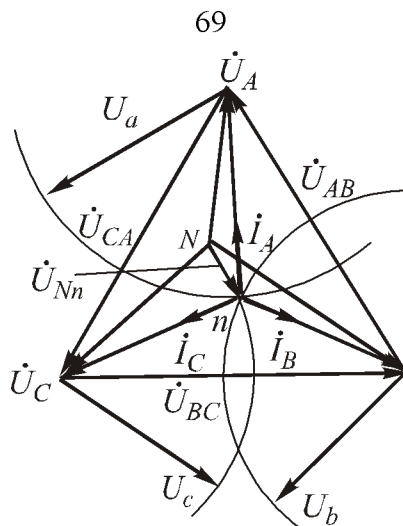


Рис. 3.11 Определение смещения нулевой точки

### Контрольные вопросы

1. Что такое симметричная нагрузка?
2. Необходим ли нулевой провод при симметричной нагрузке?
3. Построить векторную диаграмму токов при симметричной нагрузке.
4. Зачем необходим нулевой провод?
5. Что будет с фазными напряжениями при отсутствии нулевого провода и несимметричной нагрузке?
6. Если две фазы нагружены слабо, а одна сильно, что будет с фазными напряжениями при отсутствии нейтрали?
7. Если одна фаза нагружена слабо, а две другие сильно, что будет с фазными напряжениями при отсутствии нейтрали?

### 3.6 Аварийные режимы работы трехфазных цепей

#### Обрыв фазы

$$R_a = \infty; R_b = R_c;$$

#### а) четырехпроводная звезда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{nN} &= 0; \\ \dot{I}_A &= 0; \dot{I}_B = \dot{U}_B Y_b; \dot{I}_C = \dot{U}_C Y_c. \end{aligned}$$

Векторная диаграмма (рис. 3.12) демонстрирует работу четырехпроводной системы.

**б) трехпроводная звезда**

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_B g_\phi + \dot{U}_C g_\phi}{2g_\phi} = \frac{\dot{U}_B + \dot{U}_C}{2}.$$

Напряжение смещения  $\dot{U}_{nN}$  можно также определить методом засечек, как показано на рис. 3.13.

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C; \\ \dot{I}_A &= 0; \\ \dot{I}_B &= -\dot{I}_C. \end{aligned}$$

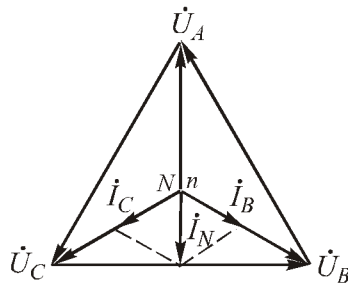


Рис. 3.12 Векторная диаграмма для обрыва фазы в четырехпроводной системе

Токи в фазах *b* и *c* должны находиться в противофазе.

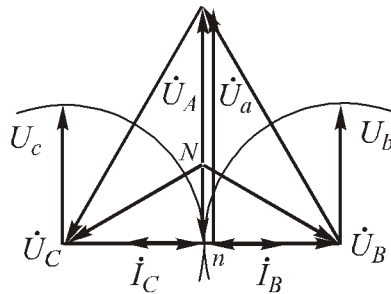


Рис. 3.13 Векторная диаграмма для обрыва фазы в трехпроводной системе

**Короткое замыкание фазы**

$$R_a = 0; R_b = R_c;$$

**а) четырехпроводная звезда.**

В четырехпроводной системе при коротком замыкании фазы приемника получаем короткое замыкание фазы источника.

**б) трехпроводная звезда**

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A Y_a}{Y_a} = \dot{U}_A.$$

Фазные напряжения приемника:

$$\dot{U}_a = 0;$$

$$\dot{U}_{BA} = \dot{U}_B - \dot{U}_A = \dot{U}_b - \dot{U}_a \rightarrow \dot{U}_b = -\dot{U}_{BA};$$

$$\dot{U}_b = -\dot{U}_{BA};$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = \dot{U}_c - \dot{U}_a \rightarrow \dot{U}_c = \dot{U}_{CA};$$

т.е. фазные напряжения увеличились до линейных напряжений.

Соответственно, токи фаз:

$$\dot{I}_B = \frac{-\dot{U}_{BA}}{R_b}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{CA}}{R_c} \text{ увеличились в } \sqrt{3} \text{ раз.}$$

$$\dot{I}_A = -\dot{I}_B - \dot{I}_C.$$

Построение векторной диаграммы показано на рис. 3.14.

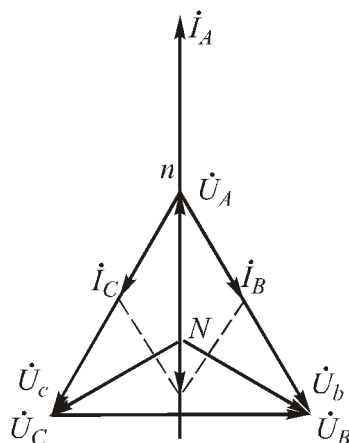


Рис. 3.14 Векторная диаграмма для короткого замыкания фазы *A*

### **Разнородная нагрузка**

#### **а) четырехпроводная звезда**

Сравнив схемы соединения потребителей трех- и четырехпроводной звездой, можно сделать вывод, что однофазные приемники надо включать по схеме четырехпроводной звезды, чтобы обеспечить постоянство напряжений на зажимах этих приемников.

По схеме трехпроводной звезды включают трехфазные симметричные приемники, например, трехфазные асинхронные и синхронные двигатели.

### **Контрольные вопросы**

1. Нарисуйте векторную диаграмму при обрыве фазы в четырехпроводной системе.
2. Нарисуйте векторную диаграмму при обрыве фазы в трехпроводной системе.

3. Какой возникает режим при к.з. в четырехпроводной системе?
4. Нарисуйте векторную диаграмму при к.з. в трехпроводной системе.
5. В какую схему: трех- или четырехпроводную включаются однофазные потребители?
6. В какую схему: трех- или четырехпроводную включаются симметричные трехфазные потребители?
7. Приведите примеры симметричных трехфазных потребителей.

### 3.7 Соединение потребителей «треугольником»

Рассмотрим различные режимы работы приемника при соединении его фаз «треугольником».

Вновь будем считать, что в качестве потребителей в фазах включены активные сопротивления (для простоты построений).

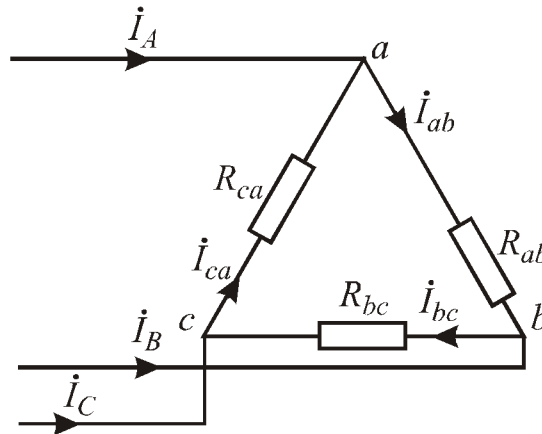


Рис. 3.15 Соединение фаз приемника «треугольником»

#### а) симметричный режим

$$R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\phi}.$$

На рис.3.15 построена векторная диаграмма для симметричной нагрузки при соединении фаз приемника «треугольником».

Токи равны по модулю и отличаются только по фазе:

$$\dot{I}_{\phi} = \frac{\dot{U}_{\phi}}{R_{\phi}}.$$

Линейные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_C &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}; \\ \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0. \end{aligned}$$

**в) несимметричные режимы**

$$R_{ab} \neq R_{bc} = R_{ca};$$

Фазы по-прежнему работают независимо друг от друга и поэтому фазные токи:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{R_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{R_{ca}};$$

Линейные токи определяются соответственно по формулам (3.9). На рис. 3.16 представлены векторные диаграммы для несимметричной нагрузки приемников соединенных «треугольником».

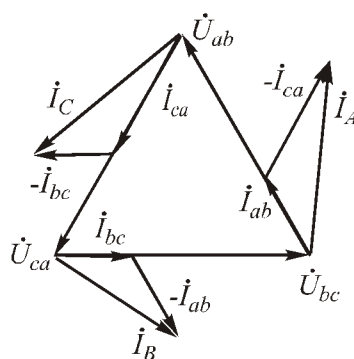


Рис. 3.16 Векторные диаграммы для несимметричной нагрузки приемников соединенных «треугольником».

**с) обрыв фазы**

$$R_{ab} = \infty; \quad R_{bc} = R_{ca}.$$

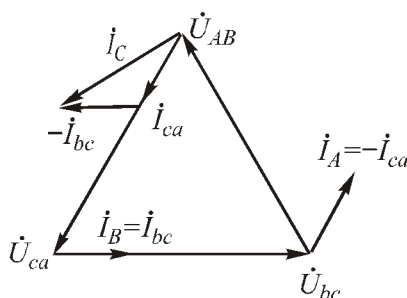


Рис. 3.17 Векторная диаграмма для обрыва фазы при соединении приемников «треугольником»

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= -\dot{I}_{ca} ; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} ; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} . \end{aligned}$$

При разнородной нагрузке методика расчета не меняется.

### Контрольные вопросы

1. Что означает соединение «треугольником»?
2. Симметричный режим в треугольнике.
3. Какое соотношение между линейными и фазными токами в треугольнике при симметричной нагрузке?
4. Приведите математическое соотношение между линейными и фазными токами в общем случае.
5. Нарисуйте векторную диаграмму для обрыва фазы при соединении приемников «треугольником».
6. Какая из схем соединений лучше: «треугольник» или «звезда»?

### 3.8 Мощность трехфазной цепи

Рассмотрим расчет мощности при соединении приемников по схеме четырехпроводной звезды и допустим, что нагрузка несимметрична. Если учесть, что сопротивление нейтрального провода не равно нулю и активное, то имеем:

$$P_Y = P_a + P_b + P_c = U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c + I_N^2 R_N ;$$

$$Q_Y = Q_a + Q_b + Q_c + Q_N = U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c ;$$

$$S_Y \sqrt{P_Y^2 + Q_Y^2}$$

При симметричной нагрузке для трех- и четырехпроводной системы:

$$P_Y = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi = 3 \frac{U_n}{\sqrt{3}} I_n \cos \varphi_\phi = \sqrt{3} U_n I_n \cos \varphi_\phi ; \quad (3.10)$$

$$Q_Y = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi = 3 \frac{U_n}{\sqrt{3}} I_n \sin \varphi_\phi = \sqrt{3} U_n I_n \sin \varphi_\phi ; \quad (3.11)$$

$$S = \sqrt{3} U_n I_n \quad (3.12)$$

При соединении фаз приемника «треугольником» и несимметрии нагрузки имеем:

$$P_{\Delta} = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca} = U_{ab}I_{ab} \cos \varphi_{ab} + U_{bc}I_{bc} \cos \varphi_{bc} + U_{ca}I_{ca} \cos \varphi_{ca};$$

$$Q_{\Delta} = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} = U_{ab}I_{ab} \sin \varphi_{ab} + U_{bc}I_{bc} \sin \varphi_{bc} + U_{ca}I_{ca} \sin \varphi_{ca};$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{P_{\Delta}^2 + Q_{\Delta}^2}.$$

При симметричной нагрузке:

$$P_{\Delta} = 3P_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \cos \varphi_{\phi} = 3\frac{U_{л}}{\sqrt{3}}I_{л} \cos \varphi_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \cos \varphi_{\phi}; \quad (3.13)$$

$$Q_{\Delta} = 3Q_{\phi} = 3U_{\phi}I_{\phi} \sin \varphi_{\phi} = 3\frac{U_{л}}{\sqrt{3}}I_{л} \sin \varphi_{\phi} = \sqrt{3}U_{л}I_{л} \sin \varphi_{\phi}; \quad (3.14)$$

$$S_{\Delta} = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U_{л}I_{л}. \quad (3.15)$$

При этом необходимо учесть, что одинаковые формулы для подсчета мощности не означают одинаковые численные значения.

Пример. Пусть трехфазный приемник с сопротивлением фазы  $Z_{\phi}$  соединен «звездой», тогда активная мощность

$$P_Y = 3P_{\phi} = 3\frac{U_{\phi}^2}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi} = 3\left(\frac{U_{л}}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{1}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi} = \frac{U_{л}^2}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi}.$$

Теперь фазы того же приемника соединим «треугольником» и подключим к тому же трехфазному источнику:

$$P_{\Delta} = 3P_{\phi} = 3\frac{U_{\phi}^2}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi} = 3\frac{U_{л}^2}{Z_{\phi}} \cos \varphi_{\phi},$$

т.е.

$$P_{\Delta} = 3P_Y.$$

### ***Измерение мощности в трехфазных цепях***

#### ***Приемники, соединенные по схеме четырехпроводной звезды.***

В этой схеме однофазные ваттметры включаются в каждую фазу, причем через токовые катушки протекают линейные токи, а катушки напряжения включены между нулевым и соответствующим линейным проводами.

$$P = \operatorname{Re}[\tilde{S}].$$

Суммарная мощность трех ваттметров:

$$P_{\Sigma} = \operatorname{Re}[\dot{U}_a^* I_a + \dot{U}_b^* I_b + \dot{U}_c^* I_c]$$

или

$$P_{\Sigma} = P_a + P_b + P_c.$$

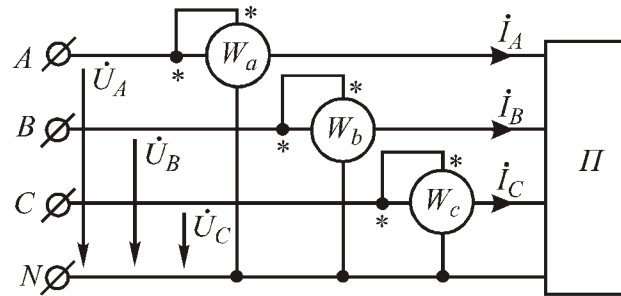


Рис. 3.18 Схема включения ваттметров для измерения мощности в четырехпроводной системе

В случае симметричной нагрузки для измерения мощности, потребляемой ею, достаточно воспользоваться одним ваттметром, показание которого нужно утроить.

**Приемники, соединенные по схеме «трехпроводной звезды» или «треугольником».**

В этом случае измерить мощность трехфазного приемника можно с помощью двух ваттметров (рис. 3.19).

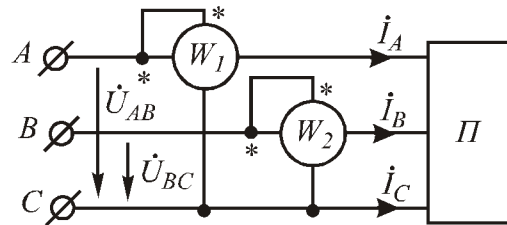


Рис. 3.19 Схема измерения активной мощности двумя ваттметрами

Докажем это:

$$P = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_{AC}^* I_A + \dot{U}_{BC}^* I_B \right] = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_A^* I_A - \dot{U}_C^* I_A + \dot{U}_B^* I_B - \dot{U}_C^* I_B \right] \quad (3.16)$$

Если учесть, что

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0,$$

а

$$\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B,$$

то

$$-\dot{U}_C^* (\dot{I}_A + \dot{I}_B) = \dot{U}_C^* \dot{I}_C.$$



Тогда окончательно имеем

$$P = \operatorname{Re} \left[ \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C \right];$$

Оба ваттметра выполняются в одном корпусе, и прибор имеет две пары выводов для токовых катушек и две пары выводов – для катушек напряжения. Включают трехфазный ваттметр по приведенной на рис.3.19 схеме или по любой схеме с циклической заменой фаз.

### Контрольные вопросы

1. Приведите выражение полной мощности трехфазной цепи при симметричной нагрузке.
2. Приведите выражение полной мощности трехфазной цепи при несимметричной нагрузке.
3. Приведите выражение активной мощности трехфазной цепи при симметричной нагрузке.
4. Приведите выражение реактивной мощности трехфазной цепи при симметричной нагрузке.
5. Приведите схему измерения трехфазной мощности с помощью трех ваттметров.
6. Приведите схему измерения трехфазной мощности с помощью двух ваттметров.

### 3.9 Метод симметричных составляющих

Любую несимметричную трехфазную систему можно разложить на три симметричные трехфазные системы: прямой, обратной и нулевой последовательностей. Такое разложение широко применяется при анализе работы трехфазных машин, и в особенности при расчете токов короткого замыкания в трехфазных системах.

Пусть дана несимметричная трехфазная система векторов  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$  (рис. 3.20).

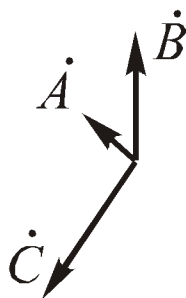


Рис. 3.20 Несимметричная трехфазная система векторов

Каждый из векторов этой системы можно представить в виде суммы трех составляющих:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ \dot{B} &= \dot{B}_0 + \dot{B}_1 + \dot{B}_2; \\ \dot{C} &= \dot{C}_0 + \dot{C}_1 + \dot{C}_2.\end{aligned}\quad (3.17)$$

На рис. 3. 21 изображены системы указанных выше последовательностей.

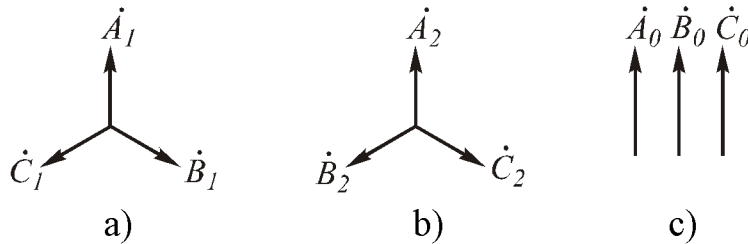


Рис. 3. 21 Симметричные системы векторов прямой (а), обратной (b) и нулевой (с) последовательностей

Векторы прямой, обратной и нулевой последовательностей подчиняются следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\dot{B}_0 &= \dot{A}_0; \dot{B}_1 = a^2 \dot{A}_1; \dot{B}_2 = a \dot{A}_2; \\ \dot{C}_0 &= \dot{A}_0; \dot{C}_1 = a \dot{A}_1; \dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2.\end{aligned}\quad (3.18)$$

где  $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ ,  $a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}}$ .

Подставим соотношения (3.18) в систему уравнений (3.17).

Тогда получим:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_0 + \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ \dot{B} &= \dot{A}_0 + a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2; \\ \dot{C} &= \dot{A}_0 + a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2.\end{aligned}\quad (3.19)$$

Решение системы уравнений (3.19) относительно  $\dot{A}_0, \dot{A}_1, \dot{A}_2$  дает:

$$\begin{aligned}\dot{A}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}) = \frac{3\dot{A}_0}{3} = \dot{A}_0; \\ \dot{A}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}); \\ \dot{A}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C})\end{aligned}\quad (3.20)$$

Симметричные составляющие можно определить графически, если на векторной диаграмме несимметричной системы векторов выполнить

построения в соответствии с системой уравнений (3.20).

### ***Фильтры симметричных составляющих***

Симметричные составляющие несимметричных систем можно определить не только аналитически или графически, но и при помощи электрических схем, называемых фильтрами симметричных составляющих.

Эти фильтры применяются в схемах, защищающих электрические установки. Степень асимметрии системы токов и напряжений не должна превосходить известных пределов, т.е. составляющие нулевой и обратной последовательностей системы напряжений и токов при нормальных режимах должны быть меньше некоторых наперед заданных величин, определяемых для каждой конкретной установки индивидуально.

Возможность выделить при помощи электрических схем отдельные симметричные составляющие позволяет осуществить воздействие любой из них на приборы, защищающие установку, которые, будучи соответствующим образом отрегулированы, отключат или всю установку, или ее часть, как только величина соответствующей составляющей превысит допустимый предел.

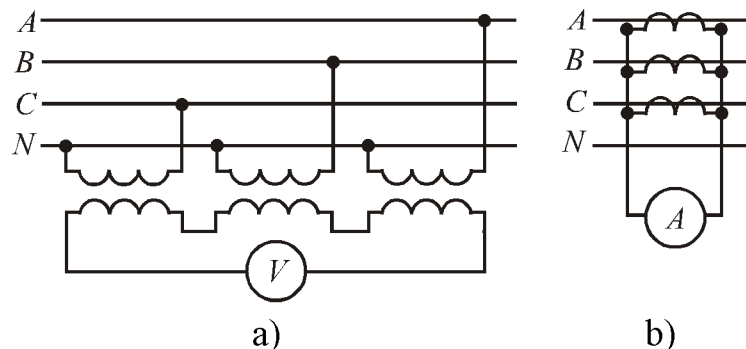


Рис. 3.22 Фильтры нулевой последовательности

На (рис. 3.22) в качестве примера приведены фильтры нулевой последовательности линейных токов и фазных напряжений. В схеме (рис. 3.22a) вторичные обмотки трансформаторов напряжения включены последовательно и поэтому вольтметр определяет сумму фазных напряжений, т.е. утроенную составляющую нулевой последовательности системы фазных напряжений.

В схеме (рис. 3.22b) вторичные обмотки трансформаторов тока включены параллельно и поэтому амперметр измеряет сумму линейных токов, т.е. утроенную составляющую нулевой последовательности линейных токов.

### **Контрольные вопросы**

1. В чем суть метода симметричных составляющих?

2. Нарисуйте систему векторов прямой, обратной и нулевой последовательности.
3. В чем различие системы векторов прямой и обратной последовательности?
4. Каким соотношениям подчиняются векторы прямой, обратной и нулевой последовательности?
5. Что такое фильтры симметричных составляющих?
6. Для чего применяются фильтры нулевой последовательности?
7. Приведите примеры применения фильтров нулевой последовательности.

### 3.10 Круговое вращающееся поле

#### *Пульсирующее магнитное поле*

Вращающееся магнитное поле нашло исключительно широкое практическое применение. С его помощью реализован принцип работы большинства электрических машин (асинхронные двигатели, синхронные двигатели – класс трехфазных машин, а также двухфазные двигатели переменного тока). Рассмотрение этого вопроса начнем с понятия пульсирующего поля.



Рис. 3.23 Условное представление катушки индуктивности

Пусть по катушке протекает синусоидальный ток  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$ . Этот ток вызовет синусоидальный магнитный поток, причем, направление тока и магнитного потока определяется по правилу правоходового винта.

Из соотношения:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{W\Phi}{i} \quad (3.21)$$

имеем:

$$\Phi(t) = \frac{L}{W} i(t) = \frac{I_m L}{W} \sin(\omega t + \varphi_i) = \Phi_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.22)$$

Соответственно, магнитная индукция:

$$B = B_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (3.23)$$

Ток и магнитный поток изменяются в фазе. Поскольку ток синусоидален,

то синусоидальными являются магнитный поток и магнитная индукция, т.е. магнитный поток меняется как по величине, так и по направлению – это и есть пульсирующее магнитное поле.

### *Вращающееся магнитное поле системы двух катушек*

Пусть даны две одинаковые катушки, оси которых расположены под углом  $90^\circ$  по отношению друг к другу (рис. 3.24).

По катушкам протекают токи:

$$I_1 = I_m \sin \omega t;$$

$$i_2 = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \omega t.$$

Временной и пространственный сдвиг катушек составляет  $90^\circ$ . В каждой катушке возникает свое пульсирующее поле.

$$\vec{B}_0(t) = \vec{B}_1(t) + \vec{B}_2(t);$$

$$B_0(t) = \sqrt{B_1^2(t) + B_2^2(t)} = \sqrt{B_m^2 \sin^2 \omega t + B_m^2 \cos^2 \omega t} = B_m. \quad (3.24)$$

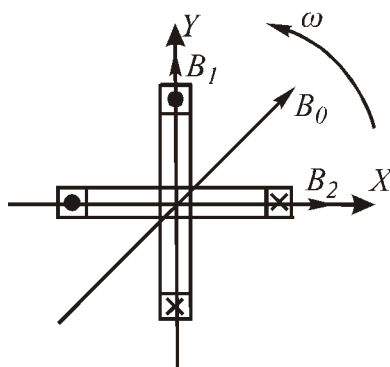


Рис. 3.24 Система двух катушек с пространственным сдвигом на  $90^\circ$

Полученный результат показывает, что результирующая магнитная индукция не зависит от времени и равна амплитуде магнитной индукции одной из катушек.

$$B_1(t) = B_m \sin \omega t;$$

$$B_2(t) = B_m \cos \omega t.$$

Оценим значения  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$ ,  $B_0(t)$  в различные моменты времени:

При  $\omega t = 0$ :  $B_1(t) = 0$ ,  $B_2(t) = B_m$ ,  $B_0 = B_m$  (рис. 3.25,а);

При  $\omega t = \pi/2$ :  $B_1(t) = B_m$ ,  $B_2(t) = 0$ ,  $B_0 = B_m$  (рис. 3.25,б).

Вектор  $\vec{B}_0$  вращается с угловой частотой  $\omega$ . Частота вращения вектора магнитного поля определяется частотой тока, питающего катушки. Направление вращения вектора магнитного поля можно изменить на противоположное, изменяя направления тока в одной из катушек на обратное.

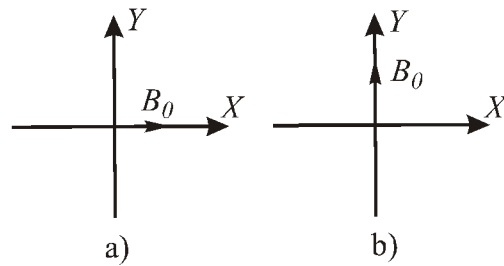


Рис. 3.25 Значение магнитной индукции в разные моменты времени

Для получения вращающегося магнитного поля необходимо, чтобы одна катушка обладала большой индуктивностью, но малым сопротивлением, а вторая наоборот (рис. 3.26). Таким образом достигается фазовый сдвиг примерно на  $90^\circ$ .

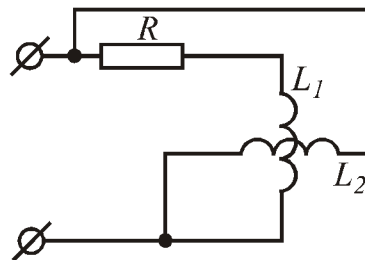


Рис. 3.26 Способ получения пространственного и фазового сдвига на угол  $90^\circ$

### ***Вращающееся магнитное поле системы трёх катушек***

Рассмотрим аналогичную систему трёх катушек, оси которых сдвинуты на угол  $120^\circ$ .

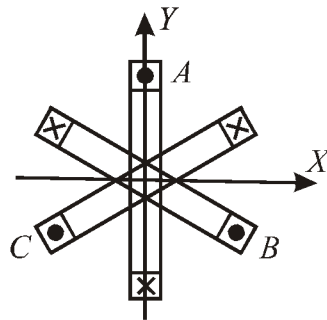


Рис. 3.27 Система трёх катушек

Катушки жестко закреплены, кроме того, токи также имеют временной сдвиг в  $120^\circ$ .

$$i_A = I_m \sin \omega t;$$

$$i_B = I_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$i_C = I_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$B_A(t) = B_m \sin \omega t;$$

$$B_B(t) = B_m \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$B_C(t) = B_m \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right).$$

Каждый из этих токов вновь вызовет пульсирующее магнитное поле. Найдём результат действия этих токов:

$$\vec{B}_0(t) = \vec{B}_A(t) + \vec{B}_B(t) + \vec{B}_C(t). \quad (3.25)$$

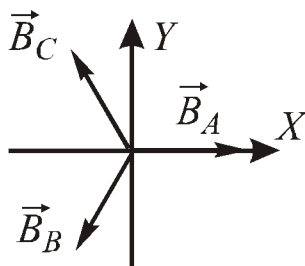


Рис. 3.28 Векторы  $\vec{B}_A, \vec{B}_B, \vec{B}_C$  на плоскости  $XOY$

Найдём проекции данных векторов на каждую из осей.

Ось  $OX$ :

$$B_x = B_A - B_B \cos \frac{\pi}{3} - B_C \cos \frac{\pi}{3} = B_m \left[ \sin \omega t - \frac{1}{2} \left( \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] =$$

$$= B_m \left[ \sin \omega t - \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi}{3} \right] = 1,5 B_m \sin \omega t.$$

Ось  $OY$ :

$$B_y = B_C \cos \frac{\pi}{6} - B_B \cos \frac{\pi}{6} = B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) - \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right] =$$

$$= B_m \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cos \omega t \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 1,5 B_m \cos \omega t.$$

В итоге:

$$B_0 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,5 B_m. \quad (3.26)$$

Полученный результат показывает, что амплитуда магнитной индукции не меняется во времени, но в отличие от системы двух катушек в полтора раза больше амплитуды магнитной индукции любой из катушек. Это в свою очередь говорит о том, что работа, совершаемая полем трёх катушек, будет в полтора раза больше, чем работа, совершаемая полем двух катушек.

Найдём соотношения проекций  $B_x$  и  $B_y$ :

$$\frac{B_x}{B_y} = \operatorname{tg} \omega t.$$

Пусть  $\omega t = \alpha$ , тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{B_x}{B_y} = \omega t,$$

т.е. вектор результирующей магнитной индукции  $\vec{B}_o$  вращается с постоянной угловой частотой  $\omega$  и при вращении описывает окружность. Такое магнитное поле называется круговым.

### Контрольные вопросы

1. Где используется вращающееся магнитное поле?
2. Что представляет собой пульсирующее магнитное поле?
3. Какой пространственный сдвиг необходим в системе двух катушек для получения кругового вращающегося поля?
4. Каким образом достигнуть временного сдвига на  $90^\circ$  в системе двух катушек для получения кругового вращающегося поля?
5. Какой пространственный сдвиг необходим в системе трех катушек для получения кругового вращающегося поля?
6. Какой временной сдвиг необходим в системе трех катушек для получения кругового вращающегося поля?
7. Какое поле будет получено, если нарушено условие необходимого пространственного сдвига?
8. Какое поле будет получено, если нарушено условие необходимого временного сдвига?

## 3.11 Применение кругового вращающегося поля

### 3.11.1 Принцип работы асинхронного двигателя

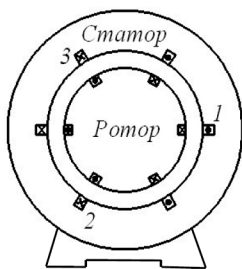


Рис. 3.29 Асинхронный двигатель

Наиболее распространенным в промышленности типом двигателя переменного тока является асинхронный двигатель. В нем имеется неподвижная часть – статор, в пазах которого помещены три катушки, создающие круговое вращающееся магнитное поле, и подвижная часть – ротор, в пазах которого находятся три замкнутые на себя или внешнее сопротивление катушки (рис. 3.29).

Катушки на рис. 3.29 даны в разрезе, торцовые части катушек не показаны; каждая из катушек занимает лишь небольшую часть окружности статора (или ротора). В действительности каждая из катушек занимает около  $1/3$  окружности



статора (ротора).

Допустим, что вначале ротор неподвижен. При этом вращающееся магнитное поле, созданное обмоткой статора, пересекает провода катушек неподвижного ротора с угловой скоростью  $\omega$  и наводят в них э.д.с. Э.д.с. вызовут токи в катушках ротора. По закону Ленца, эти токи стремятся своим магнитным полем ослабить вызвавшее их магнитное поле.

Механическое взаимодействие токов ротора с вращающимся магнитным полем приведет к тому, что ротор начнет вращаться в ту же сторону, что и магнитное поле (направление определяется правилом левой руки).

В установившемся режиме скорость вращения ротора составляет  $0,98 \div 0,95$  от скорости поля. Двигатель называют асинхронным потому, что ротор его вращается не синхронно с вращающимся полем. При скорости ротора, равной скорости поля вращающееся поле не будет пересекать витки ротора, э.д.с. в нем не наведется, ток, следовательно и момент ротора, станет равным нулю.

### 3.11.2 Указатель последовательности чередования фаз

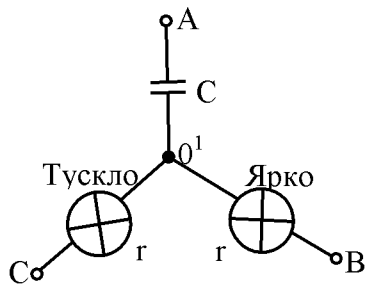


Рис. 3.30 Указатель последовательности чередования фаз

будет определяться положением точки  $O'$  на векторной диаграмме рис 3.31 (соответствует точке  $p$ ).

Определение порядка или последовательности чередования фаз в трехфазной симметричной системе э.д.с. производят с помощью указателя последовательности чередования фаз. Он состоит из двух одинаковых ламп накаливания и конденсатора (рис. 3.30). Емкость  $C$  берут такой величины, чтобы емкостное сопротивление  $1/\omega C$  равнялось сопротивлению каждой лампы.

Если три конца указателя подключить к трем концам симметричной трехфазной системы э.д.с., то потенциал нулевой точки схемы на рис. 3.30

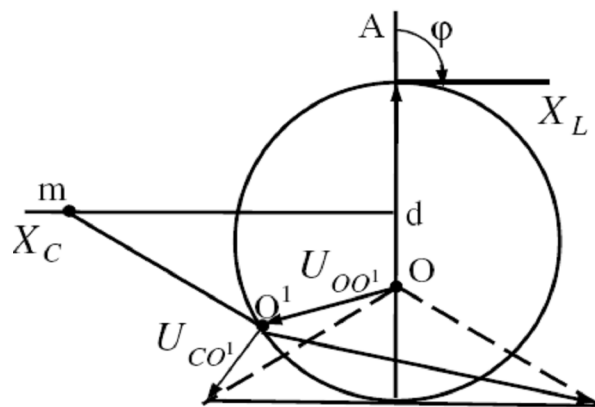


Рис. 3.31 Векторная диаграмма указателя

Из диаграммы на рис. 3.31 видно, что напряжение на лампах накаливания будет различно. На лампе, включенной в фазу  $B$ , оно определяется вектором  $\dot{U}_{BO'}$ , на лампе, включенной в фазу  $C$ , – вектором  $\dot{U}_{CO'}$ . Так как  $\dot{U}_{BO'} > \dot{U}_{CO'}$ , то лампа в фазе  $B$  будет гореть более ярко, чем лампа в фазе  $C$ . Следовательно, если фазу трехфазной системы э.д.с., к которой подключен конец от емкости, принять за фазу  $A$ , то фаза, к которой окажется подключенной ярко горящая лампа, есть фаза  $B$ , а фаза с тускло горящей лампой – фаза  $C$ .

### 3.12 Коэффициент мощности трехфазных приемников и способы его повышения

При рассмотрении цепей однофазного тока введено понятие коэффициент мощности  $\cos\varphi$ . В судовом электрооборудовании используются симметричные трёхфазные приёмники (например, асинхронные двигатели, печи, трансформаторы, преобразователи переменного тока в постоянный и т.д.). Асинхронные двигатели потребляют из сети до 65 % реактивной энергии, трансформаторы потребляют из сети до 25 % трёхфазные приёмники. Реактивная энергия передаётся от источника электрической энергии к приёмнику и обратно, что является не целесообразным, так как приводит к большим потерям электрической энергии в линиях электропередач. Борьба с потерями электрической энергии ведётся разными методами.

Стремятся приблизить источники реактивной энергии к местам её потребления, что приводит к увеличению коэффициента мощности трёхфазных приёмников.

Применение компенсирующих устройств, которые вырабатывают реактивную энергию. В качестве компенсирующих устройств используют синхронные компенсаторы или батареи конденсаторов. Синхронные компенсаторы представляют собой синхронную электрическую машину, работающую в режиме холостого хода.

На промышленных предприятиях улучшение коэффициента мощности должно достигаться без применения компенсирующих устройств за счет полной загрузки асинхронных двигателей, печей и трансформаторов. То есть заменой мало загруженных двигателей двигателями меньшей мощности, а также ограничением во времени режимов холостого хода трансформаторов, асинхронных двигателей и другого электрооборудования.

#### Контрольные вопросы

1. Как устроен асинхронный двигатель?
2. Какова задача статора асинхронного двигателя?
3. Какова задача ротора асинхронного двигателя?
4. Что означает асинхронный режим?

5. Чему равен вращающий момент ротора при скорости его вращения равной скорости вращения поля?
6. Покажите устройство и принцип действия указателя последовательности чередования фаз.
7. Какие организационные и технические меры необходимо предпринимать для повышения коэффициента мощности?

## 4. НЕСИНУСОИДАЛЬНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### 4.1 Несинусоидальные цепи

#### Основные понятия и определения

В главе 2 рассмотрены процессы в цепях переменного тока при гармонических изменениях э.д.с. и токов. На практике чаще встречаемся с несинусоидальными периодическими э.д.с. и токами, которые изменяются во времени не по гармоническому закону, но значения которых регулярно повторяются при истечении полного цикла изменений  $T$ , как это показано на рис. 4.1.

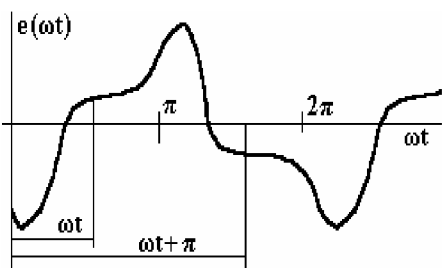


Рис. 4.1 Несинусоидальная функция

Несинусоидальные э.д.с. и токи возникают при включении в цепь переменного тока элемента с насыщенным стальным сердечником, наличие нелинейных сопротивлений в цепи, включение некоторых преобразователей энергии и в ряде других случаев.

Обычным приёмом является представление несинусоидальных э.д.с. или токов в виде суммы синусоидальных э.д.с. и токов при помощи разложения в ряд Фурье.

Для периодической несинусоидальной э.д.с. можем записать:

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + E_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + E_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K) + \dots \quad (4.1)$$

где  $E_0$  – постоянная составляющая э.д.с.:

$E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  – основная или первая гармоника;

$E_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K)$  – высшая гармоника порядка  $k$ ;

$E_{Km}$  – амплитуда;

$\psi_K$  – начальная фаза  $k$ -й гармоники.

Заметим, что разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющим условиям Дирихле, то есть имеющих за полный период конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов. Этим условия всегда удовлетворяют э.д.с., напряжения и токи в реальных физических цепях.

Для вычисления коэффициентов ряда Фурье целесообразно его члены

представить через синусы и косинусы без начальных фаз. Имеем:

$$\begin{aligned} E_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K) &= E_{Km} \sin K\omega t \cdot \cos \psi_K + \\ E_{Km} \cos K\omega t \cdot \sin \psi_K &= B_K \sin K\omega t + C_K \cos K\omega t \end{aligned} \quad (4.2)$$

Таким образом,

$$e(t) = E_0 + \sum_{K=1}^{\infty} B_K \sin K\omega t + \sum_{K=1}^{\infty} C_K \cos K\omega t. \quad (4.3)$$

Из курса математики известны формулы для нахождения  $E_0; B_K; C_K$ :

$$E_0 = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt; \quad (4.4)$$

$$B_K = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cdot \sin(k\omega t) dt; \quad (4.5)$$

$$C_K = \frac{2}{T} \int_0^T e(t) \cdot \cos(k\omega t) dt. \quad (4.6)$$

Имея  $B_K$  и  $C_K$ , находим амплитуду и начальную фазу:

$$E_{Km} = \sqrt{B_K^2 + C_K^2}; \quad (4.7)$$

$$\operatorname{tg} \psi_K = \frac{C_K}{B_K}. \quad (4.8)$$

В общем случае ряд Фурье содержит бесконечное число членов, но, как правило, обычно можно ограничиться некоторым конечным числом члена ряда (обычно 3-4).

Таким образом, несинусоидальный источник напряжения можно представить упрощенно как схему, изображенную на рис. 4.2.

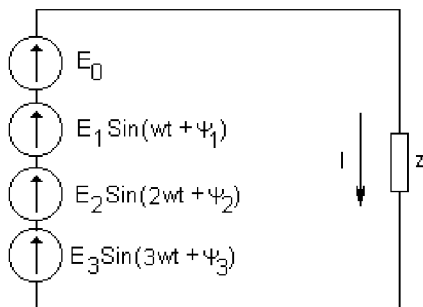


Рис. 4.2 Представление несинусоидальной э.д.с в виде совокупности гармонических источников

Значительное число непериодических функций времени, с которыми приходится встречаться в электротехнике (рис. 4.3), удовлетворяет условие:

$$e(t) = -e(t+T) \quad (4.9)$$

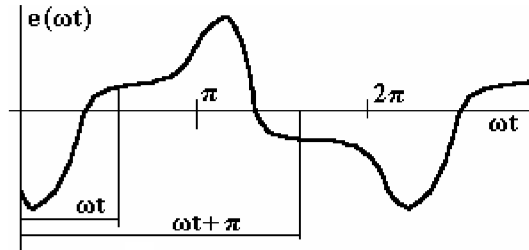


Рис. 4.3 Функция, симметричная относительно оси абсцисс

Функции, удовлетворяющие этому условию, называются симметричными относительно оси абсцисс. Они раскладываются в ряд, который не содержит четных гармоник и постоянной составляющей:

$$e(t) = B_1 \sin \omega t + B_3 \sin 3\omega t + C_1 \cos \omega t + C_3 \cos 3\omega t. \quad (4.10)$$

В схемах выпрямления переменного тока часто приходится встречаться с функциями, которые, при соответствующем выборе начала координат, удовлетворяют условию.

$$e(t) = e(-t). \quad (4.11)$$

Такие функции называются симметричными относительно оси ординат (рис. 4.4).

В этом случае ряд не содержит синусов:

$$e(t) = E_0 + C_1 \cos \omega t + C_2 \cos 2\omega t. \quad (4.12)$$

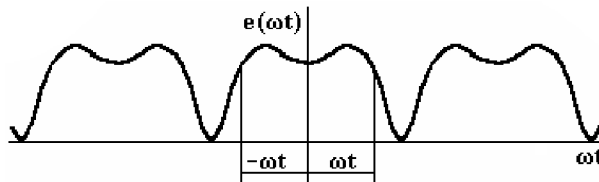


Рис. 4.4 Функция, симметричная относительно оси ординат

В схемах умножения частоты встречаются функции, которые при выборе начала координат в точке нуля функции удовлетворяют условию (рис. 4.5).

$$e(-t) = -e(t). \quad (4.13)$$

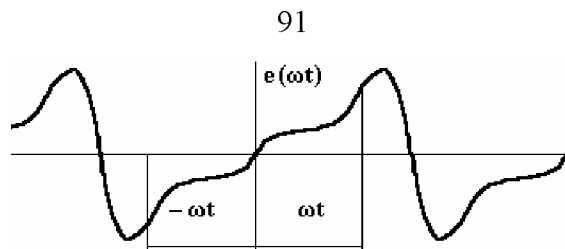


Рис. 4.5 Функция, симметричная относительно начала координат

Такие функции называются симметричными относительно начала координат. Они раскладываются в ряд, не содержащий косинусов о постоянной составляющей:

$$e(t) = B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t. \quad (4.14)$$

При оценке несинусоидальных периодических кривых в электроэнергетике используются коэффициент формы  $k_\phi$ , коэффициент амплитуды  $k_a$ , коэффициент искажения  $k_u$ .

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю значению:

$$k_\phi = \frac{A}{A_{cp}}. \quad (4.15)$$

Для синусоиды  $k_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$ .

Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему значению:

$$k_a = \frac{a_{\max}}{A}. \quad (4.16)$$

Для синусоиды  $k_a = \sqrt{2} \approx 1.41$ .

Коэффициент искажения определяется как отношение действующего значения основной (первой) гармоники к действующему значению всей кривой:

$$k_u = \frac{A_1}{A}. \quad (4.17)$$

Для синусоиды  $k_u = 1$ .

Представим в виде ряда выражение для мгновенной э.д.с., действующей в цепи:

$$e = e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_k + \dots \quad (4.18)$$

и, определяя действующую э.д.с. по известному выражению

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \quad (4.19)$$

в результате получим:

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + \dots + E_k^2}, \quad (4.20)$$

где  $k \leq (3 \div 4)$ .

Подобно выражению (4.20) получим выражение для действующего тока:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2},$$

где  $k \leq (3 \div 4)$ .

### Контрольные вопросы

1. Когда возникают несинусоидальные э.д.с. и токи?
2. Как через ряд Фурье представить несинусоидальную функцию?
3. Что такое гармоника?
4. Сколько членов, в общем случае, содержит ряд Фурье?
5. Что такое коэффициент формы?
6. Что такое коэффициент амплитуды?
7. Что такое коэффициент искажения?
8. Как определить действующее значение несинусоидальной э.д.с. тока.

### 4.2 Особенности расчета линейной электрической цепи с несинусоидальными источниками

Расчет цепей, в которых действует один или несколько несинусоидальных источников периодических э.д.с. и токов, раскладывается на три этапа.

1. Разложение э.д.с. и токов источников на постоянную и синусоидальные составляющие.
2. Применение принципа наложения и расчет токов и напряжений в цепи для каждой из составляющих в отдельности.
3. Совместное рассмотрение решений, полученных для каждой из составляющих.

Рассмотрим каждый из этих этапов подробнее.

1. Если э.д.с.

$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2), \quad (4.21)$$

то действие источника такой э.д.с. аналогично действию трёх последовательно соединённых источников э.д.с.

$$\left. \begin{aligned} e_0 &= E_0 \\ e_1 &= E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \end{aligned} \right\}. \quad (4.22)$$



Если задача поставлена иначе: заданы не э.д.с., а токи несинусоидальных источников, – то принцип решения задачи остаётся тем же.

Источник несинусоидального тока всегда можно представить в виде параллельного соединения ряда источников.

Если к узлам ветви или выходам двухполюсника подводится несинусоидальный ток

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (4.23)$$

то источник такого тока действует подобно параллельному соединению трёх источников:

$$\begin{cases} i_0 = I_0 \\ i_1 = I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ i_2 = I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{cases} \quad (4.24)$$

Применив принцип наложения, и, рассмотрев действие каждой составляющей э.д.с. в отдельности, можно найти составляющие токов во всех участках цепи.

При решении каждой из этих задач необходимо учитывать, что для различных частот индуктивные и ёмкостные сопротивления неодинаковы:

$$x_{L_k} = k \cdot \omega \cdot L = k \cdot x_{L_1}; \quad (4.25)$$

$$x_{C_k} = \frac{1}{k \cdot \omega \cdot C} = \frac{x_{C_1}}{k}. \quad (4.26)$$

2. Находим результирующий ток:

$$i_1 = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \quad (4.27)$$

Так как частоты у составляющих тока различные, то складывать выражения нельзя, можно определить лишь мгновенные значения.

### 4.3 Мощность при несинусоидальных токах и напряжениях

Под активной мощностью  $P$  несинусоидального тока понимают среднее значение мгновенной мощности за период первой гармоники:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \, dt. \quad (4.28)$$

Если представить напряжение  $u$  и ток  $i$  рядами Фурье

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots + U_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3) + \dots + U_{Km} \sin(K\omega t + \psi_K) + \dots ; \quad (4.29)$$

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1 - \phi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \phi_2) + \dots + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_3 - \phi_3) + \dots , \quad (4.30)$$

подставить эти ряды под знак интеграла и проинтегрировать, то можно получить:

$$P = I_0 \cdot U_0 + U_1 \cdot I_1 \sin \phi_1 + U_2 \cdot I_2 \sin \phi_2 + U_3 \cdot I_3 \sin \phi_3 + \dots + U_K \cdot I_K \sin \phi_K , \quad (4.31)$$

где  $\phi_1$  – угол между  $U_1$  и  $I_1$ ;

$\phi_2$  – угол между  $U_2$  и  $I_2$ ;

$\phi_K$  – угол между  $U_K$  и  $I_K$ .

Таким образом, активная мощность синусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник.

Полная мощность  $S$  равна произведению действующего значения несинусоидального напряжения на действующее значение несинусоидального тока:

$$S = U \cdot I ; \quad (4.32)$$

где  $U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_k^2}$  ;

$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \dots + I_k^2}$  .

В цепях несинусоидальных токов в отличие от синусоидальных цепей

$$S^2 > P^2 + Q^2 , \quad (4.33)$$

так как в них действует мощность искажения

$$S^2 = P^2 + Q^2 + T^2 ; \quad (4.34)$$

$$T^2 = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} . \quad (4.35)$$

Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности.

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{U \cdot I} . \quad (4.36)$$

Для синусоидальных цепей  $\lambda = \cos \phi$ , но в несинусоидальных цепях появляется коэффициент искажения.

$$\lambda = \frac{I_1}{I} \cos \phi = K_{иск} \cos \phi, \quad (4.37)$$

где  $K_{иск}$  – коэффициент искажения.

$$K_{иск} \leq 1 \text{ всегда и } \lambda \leq \cos \phi.$$

ПРИМЕР:

Вычислить  $P, Q, S$ , если напряжение и ток состоят из двух гармоник: 1-й и 3-й. Известны действующие значения гармоник напряжения  $U_1, U_3$  и тока  $I_1, I_3$ , а также углы сдвига фаз между гармониками напряжения и тока  $\phi_1, \phi_3$ .

РЕШЕНИЕ:

В этом случае мощности будут равны:

$$P = U_1 \cdot I_1 \cos \phi_1 + U_3 \cdot I_3 \cos \phi_3;$$

$$Q = U_1 \cdot I_1 \sin \phi_1 + U_3 \cdot I_3 \sin \phi_3;$$

$$S = \sqrt{(U_1^2 + U_3^2)(I_1^2 + I_3^2)};$$

$$\begin{aligned} S^2 - (P^2 + Q^2) &= U_1^2 \cdot I_3^2 + U_3^2 \cdot I_1^2 - 2U_1 \cdot I_1 \cdot U_3 \cdot I_3 \times (\cos \phi_1 \cos \phi_3 + \sin \phi_1 \sin \phi_3) = \\ &= (U_1 I_1)^2 - 2U_1 \cdot I_1 \cdot U_3 \cdot I_3 \cos(\phi_1 - \phi_3) + (U_3 I_3)^2 \end{aligned}$$

Очевидно, что  $S^2 = P^2 + Q^2$  только при условиях  $\phi_1 = \phi_3$  и  $\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_3}{I_3}$ . Эти

условия выполняются только при чисто активном сопротивлении приёмника, то есть при одинаковых формах кривых тока и напряжения.

### Контрольные вопросы

1. Назовите этапы расчета цепей, в которых действует один или несколько несинусоидальных источников периодических э.д.с.
2. Как ведется расчет индуктивных сопротивлений по отдельным гармоникам?
3. Как ведется расчет емкостных сопротивлений по отдельным гармоникам?
4. Что такое нулевая гармоника?
5. Что представляют собой емкость и индуктивность для нулевой гармоники?
6. Чему равна полная мощность несинусоидальных тока и напряжения?
7. Чему равна активная мощность несинусоидальных тока и напряжения? Реактивная?

#### 4.4 Высшие гармоники в трёхфазных цепях

Э.д.с. каждой фазы трёхфазного трансформатора или трёхфазного генератора часто оказываются несинусоидальными. Каждая э.д.с. ( $e_A, e_B, e_C$ ) повторяет по форме остальные со сдвигом на одну треть периода  $\left(\frac{T}{3}\right)$  и может быть разложена на гармоники. Постоянная составляющая, обычно, отсутствует.

Пусть  $k$ -гармоника э.д.с. фазы А:

$$e_{kA} = E_{km} \sin(k\omega t + \phi_k). \quad (4.38)$$

Так как э.д.с. фазы В отстаёт от фазы А на  $\left(\frac{T}{3}\right)$ , то  $k$ -гармоники э.д.с. фаз В и С соответственно:

$$e_{kB} = E_{km} \sin\left(k\omega\left(t - \frac{T}{3}\right) + \phi_k\right) = E_{km} \sin(k\omega t - 120^\circ k + \phi_k); \quad (4.39)$$

$$e_{kC} = E_{km} \sin(k\omega t + 120^\circ k + \phi_k); \quad (4.40)$$

$$k\omega T_3 = k \cdot \frac{2\pi T}{3T} = k \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^\circ k. \quad (4.41)$$

Если  $k = 1, 4, 7, 10$ , то  $k$ -гармоника э.д.с. фазы В опережает  $k$ -гармонику э.д.с. фазы А на  $120^\circ$ . Следовательно, 1-, 4-, 7-, 10-я гармоники образуют систему прямой последовательности фаз.

Если  $k = 2, 5, 8, 11$ , то  $k$ -гармоника э.д.с. фазы В опережает  $k$ -гармонику э.д.с. фазы А на  $120^\circ$ . Следовательно, 2-, 5-, 8-, 11-я и так далее гармоники образуют системы обратной последовательности.

Гармоники кратные трём ( $k = 3, 6, 9$ ) образуют систему нулевой последовательности, то есть третьи гармоники э.д.с. всех трёх фаз совпадают по фазе ( $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ ):

$$e_{3A} = e_{3B} = e_{3C} = E_{3m} \sin(3\omega t + \phi_3). \quad (4.42)$$

Шестые гармоники также совпадают по фазе и так далее.

На рис. 4.6 э.д.с.  $e_A = e_B = e_C$  представляют собой трёхфазные э.д.с. трёхфазного генератора. Они имеют прямоугольную форму и сдвинуты относительно друг друга на одну треть периода основной частоты. На том же рисунке показаны первая и третья гармоники каждой э.д.с. Из рисунка видно, что третьи гармоники э.д.с., действительно, находятся в фазе.

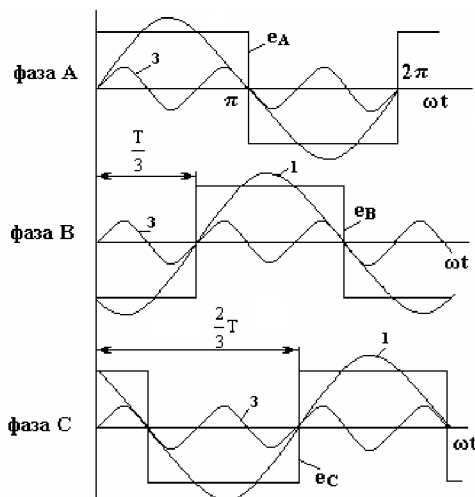


Рис. 4.6 Разложение прямоугольной э.д.с. на гармоники, находящиеся в фазе

Рассмотрим особенности работы трёхфазных систем, вызываемые гармониками, кратным трём:

1. При соединении обмоток трёхфазного генератора (трёхфазного трансформатора) треугольником (рис. 4.7) по фазам протекают токи гармоник, кратные трём, даже при отсутствии внешней нагрузки.

Алгебраическая сумма третьих гармоник э.д.с. равна  $3E_3$ . Обозначим сопротивление обмотки каждой фазы для третьей гармоники  $Z_3$ , тогда ток третьей гармоники в треугольнике  $I_3 = \frac{3E_3}{3Z_3} = \frac{E_3}{Z_3}$ . Аналогично ток шестой

гармоники  $I_6 = \frac{E_6}{Z_6}$ , где  $E_6$  – действующее значение шестой гармоники фазовой Э.Д.С.;  $Z_6$  – сопротивление фазы для шестой гармоники.

Действующее значение тока, протекающего по замкнутому треугольнику в схеме на рис. 4.7, определяется выражением

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots} \tag{4.43}$$

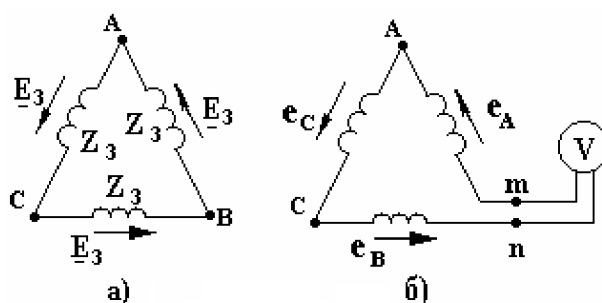


Рис. 4.7 Суммирование э.д.с. третьей гармоники в треугольнике

2. В линейном напряжении независимо от того, звездой или треугольником соединены обмотки генератора (трансформатора), гармоники, кратные трём, отсутствуют, если нагрузка равномерная.

Рассмотрим сначала схему соединения трёхфазного источника э.д.с. треугольником (рис.4.7) при отсутствии внешней нагрузки. Обозначив  $\phi_{A3}$  потенциал точки  $A$ ,  $\phi_{B3}$  – потенциал точки  $B$  по третьей гармонике, получим

$$\phi_{A3} = \phi_{B3} + \dot{E}'_3 - \dot{I}_3 \cdot Z_3.$$

Но  $\dot{E}'_3 = \dot{I}_3 \cdot Z_3$ , следовательно,  $\phi_{A3} = \phi_{B3}$ . При наличии равномерной нагрузки, соединённой треугольником, каждая фаза генератора (трансформатора) и параллельно ей присоединённая нагрузка могут быть заменены эквивалентной ветвью с некоторой э.д.с.  $\dot{E}'_3$  и сопротивлением  $Z_3$ . На полученную схему можно распространить вывод, сделанный для случая отсутствия внешней нагрузки.

При соединении звездой трёхфазного источника э.д.с. (рис. 4.8) линейное напряжение третьей гармоники равно разности соответствующих фазовых напряжений. Так как третьи гармоники в фазовых напряжениях совпадают по фазе, то при составлении этой разности они вычитаются.

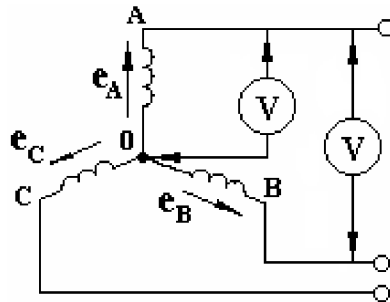


Рис.4.8 Суммирование э.д.с. третьей гармоники в звезде

В фазовом напряжении могут присутствовать все гармоники (постоянная составляющая обычно отсутствует). Следовательно, действующее значение фазового напряжения:

$$U_\phi = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \quad (4.44)$$

В линейном напряжении схемы (рис. 6.8) отсутствуют гармоники кратные трём, поэтому

$$U_1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + \dots} \quad (4.45)$$

Отношение  $\frac{U_1}{U_\phi} > 3$ , если есть гармоники кратные трём.

3. При соединении фаз генератора и равномерной нагрузки звездой и отсутствии нулевого провода токи третьих и других гармоник нулевой

последовательности не могут протекать по линейным проводам. Поэтому между нулевыми точками приёмника  $0'$  и  $0$  (рис. 4.9) при  $z_0 = \infty$  действуют напряжение:

$$U_{0'0} = E_{3m} \sin(3\omega t + \phi_3) + E_{6m} \sin(6\omega t + \phi_6) + \dots, \quad (4.46)$$

действующее значение, которого

$$U_{0'0} = \sqrt{\frac{U_3^2}{2} + \frac{U_6^2}{2} + \frac{U_9^2}{2} + \dots} \quad (4.47)$$

4. Если в схеме «звезда – звезда» при равномерной нагрузке фаз сопротивление нагрузки для третьей гармоники обозначить  $Z_{H3}$ , а сопротивление нулевого провода для третьей гармоники –  $Z_{O3}$  (рис. 4.9), то по нулевому проводу будет протекать ток третьей гармоники

$$\underline{I}_{O3} = \frac{\underline{E}_3}{Z_{O3} + \frac{Z_{H3}}{3}}.$$

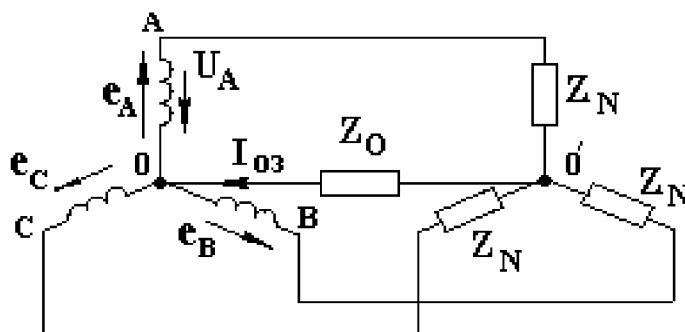


Рис. 4.9 Соединение генератора и приемника звездой при равномерной нагрузке

Аналогично находят токи других гармоник, кратных трём.

### Контрольные вопросы

1. Как ведут себя гармоники, кратные трем в звезде? В треугольнике?
2. К чему приводит наличие высших гармонических в токе двигателя?
3. Какие гармоники существуют в токах двигателя?
4. Как борются с третьей гармоникой?
5. Как борются с пятой гармоникой?
6. Как борются с седьмой гармоникой?
7. Почему не применяются средства борьбы с гармониками 11, 13, 17 и т.д.?
8. Какое соединение лучше – звезда или треугольник – с точки зрения действия высших гармонических?

### 4.5 Нелинейные цепи переменного тока

Наиболее существенная особенность расчета нелинейных цепей при переменных токах заключается в необходимости учета в общем случае динамических свойств нелинейных элементов, т.е. их анализ следует осуществлять на основе динамических вольт-амперных, вебер-амперных и кулон-вольтных характеристик.

Если нелинейный элемент является безинерционным, то его характеристики в динамических и статических режимах совпадают, что существенно упрощает расчет. Однако на практике идеально безинерционных элементов не существует. Отнесение нелинейного элемента к классу безинерционных определяется скоростью изменения входных воздействий: если период  $T$  переменного воздействия достаточно мал по сравнению с постоянной времени  $\tau$ , характеризующей динамические свойства нелинейного элемента, последний рассматривается как безинерционный; если это не выполняется, то необходимо учитывать инерционные свойства нелинейного элемента.

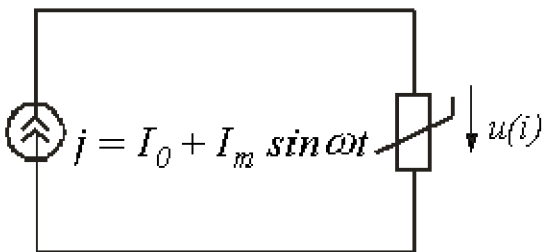


Рис. 4.10 Цепь с нелинейным резистором

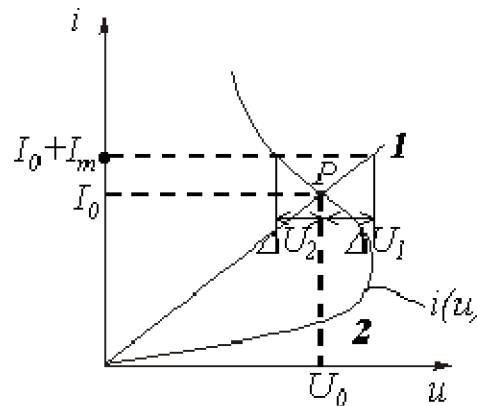


Рис. 4.11 Вольт-амперная характеристика

В качестве примера можно рассмотреть цепь на рис.4.10 с нелинейным резистором (термистором), имеющим вольт-амперную характеристику (ВАХ), представленную на рис.4.11, и характеризующимся постоянной времени нагрева  $\tau$ .

Если  $T = 2\pi / \omega \ll \tau$ , то изображающая точка  $P$  перемещается по прямой 1 и нелинейный резистор характеризуется сопротивлением  $R_j \approx \Delta U_j / I_m > 0$  ( $I_m \ll I_0$ ). При  $T \gg \tau$  изображающая точка перемещается по кривой 2, и свойства нелинейного резистора определяются сопротивлением  $R_2 \approx \Delta U_2 / I_m < 0$ .

Когда постоянная времени нагрева  $\tau$  НР одного порядка с  $T$ , соотношения между переменными составляющими напряжения и тока являются более



сложными, определяющими сдвиг по фазе между ними.

Другой важной особенностью нелинейных элементов в цепи переменного тока является вызываемое ими появление высших гармоник даже при наличии в цепи только источников синусоидального напряжения и (или) тока. На этом принципе строится, например, ряд умножителей частоты, а также преобразователей формы тока или напряжения.

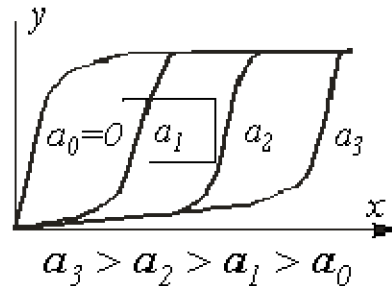
### *Основные типы характеристик нелинейных элементов в цепях переменного тока*

Использование динамических характеристик нелинейных элементов позволяет осуществлять расчет нелинейных цепей для мгновенных значений переменных, т.е. проводить принципиально ее наиболее точный и полный анализ. Однако в целом ряде случаев такой расчет может оказаться достаточно трудоемким или избыточным по своей глубине. Поэтому в зависимости от цели решаемой задачи, а также от требований к точности получаемых результатов, помимо динамической характеристики, могут использоваться нелинейные характеристики по первым гармоникам и для действующих значений (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1 **Определение типов характеристик нелинейных элементов**

Тип характеристики	Определение	Примечание
Динамическая характеристика (характеристика для мгновенных значений)	Характеристика, связывающая мгновенные значения основных определяющих величин	Используется при анализе цепи по мгновенным значениям
Характеристика по первым гармоникам	Характеристика, связывающая амплитуды (действующие значения) первых гармоник основных определяющих величин. Если воздействующая величина содержит постоянную составляющую, то нелинейный элемент характеризуется семейством зависимостей, для	Определяется по соответствующей характеристике для мгновенных значений или экспериментально. Применяется при использовании метода расчета по первым гармоникам

которых постоянная составляющая является параметром.



Характеристика, связывающая действующие значения синусоидальных и несинусоидальных величин.

Определяется по соответствующей характеристике для мгновенных значений или экспериментально.

Характеристика для действующих значений

Если воздействующая величина содержит постоянную составляющую, то нелинейный элемент характеризуется семейством зависимостей, для которых постоянная составляющая является параметром

Применяется при использовании метода расчета по действующим значениям

### Контрольные вопросы

1. Что такое вебер-амперная характеристика?
2. Что такое кулон-вольтная характеристика?
3. Какой ток будет в цепи нелинейного элемента при питании его несинусоидальным напряжением? Синусоидальным напряжением?
4. Что такое безинерционный нелинейный элемент?
5. Что такое динамическая характеристика нелинейного элемента?
6. Что такое характеристика по первым гармоникам нелинейного элемента?

### 4.6 Графические методы расчета нелинейных цепей

Графические методы расчета позволяют проводить анализ нелинейных цепей переменного тока для частных значений параметров с использованием характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений по первым гармоникам и действующим значениям.

### Графический метод с использованием характеристик для мгновенных значений

В общем случае методика анализа нелинейной цепи данным методом включает в себя следующие этапы:

- исходя из физических соображений находят (если он не задан) закон изменения одной из величин, определяющих характеристику  $y(x)$  нелинейного элемента;

- по нелинейной характеристике  $y(x)$  для известного закона изменения переменной  $x(t)$  путем графических построений определяют кривую  $y(t)$  или наоборот;

- с использованием полученной зависимости  $y(t)$  проводят анализ остальной (линейной) части цепи.

В качестве примера построим при синусоидальной э.д.с.  $e(t) = E_m \sin \omega t$  кривую тока в цепи на рис. 4.12, вольт-амперная характеристика (ВАХ)  $u_v(i)$  диода которой представлена на рис. 4.13.

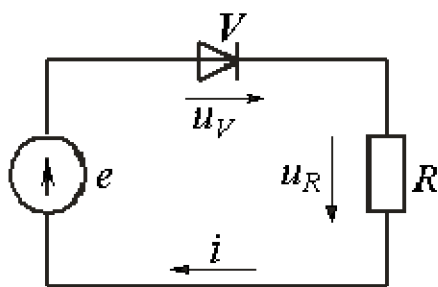


Рис. 4.12 Цепь с диодом

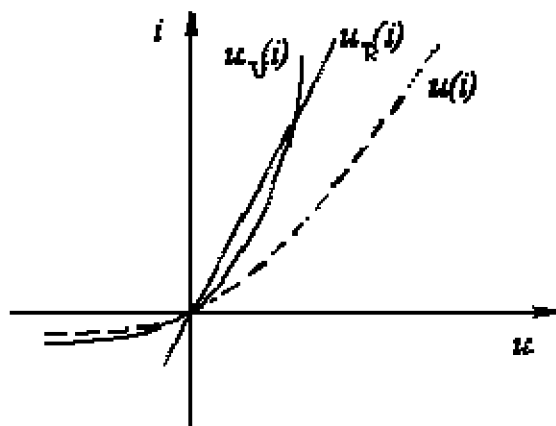


Рис. 4.13 ВАХ цепи

### Решение

1. Строим результирующую ВАХ  $u(i)$  цепи (см. рис. 4.13) согласно соотношению

$$u(t) = u_v(i) + u_R = u_v(i) + Ri$$

2. Находя для различных значений  $e(t)$  с использованием полученной кривой соответствующие им значения тока, строим по точкам (см. рис. 4.14) кривую искомой зависимости  $i(t)$ .

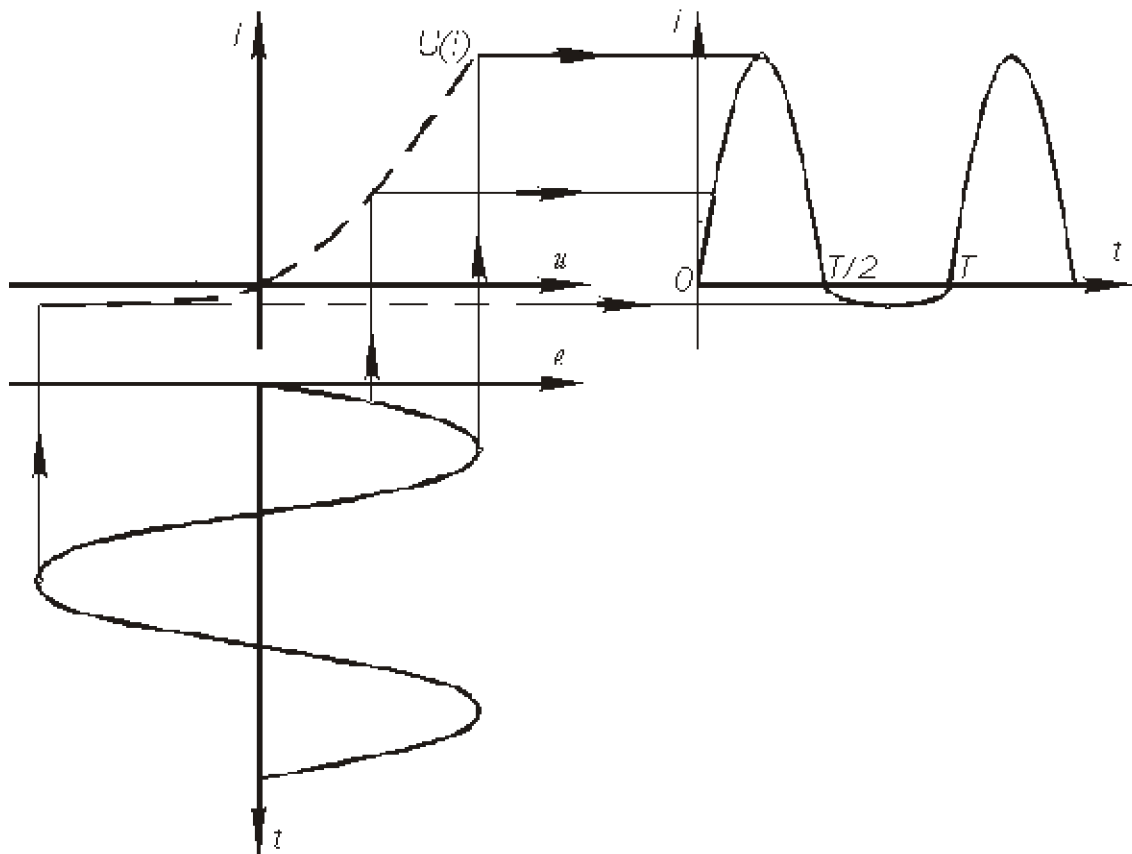


Рис. 4.14 Построение кривой  $i(t)$

К полученному результату необходимо сделать следующий комментарий. Использование при анализе подобных цепей ВАХ идеального вентиля (обратный ток отсутствует, в проводящем направлении падение напряжения на диоде равно нулю) корректно при достаточно больших значениях амплитуд приложенного к диоду напряжения, определяющих значительное превышение током, протекающим через вентиль в прямом направлении, его обратного тока, вследствие чего последним можно пренебречь. Если же эти токи становятся сопоставимыми по величине, следует использовать ВАХ реального диода, представленную на рис. 4.13 и учитывающую наличие обратного тока.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключаются особенности нелинейных цепей переменного тока?
2. Какие типы характеристик используются в цепях переменного тока для описания нелинейных элементов?
3. В каких случаях допустимо использование при расчетах идеальных ВАХ вентиля?
4. Перечислите этапы графического анализа нелинейной цепи.
5. В каком случае можно пренебречь прямым падением напряжения на диоде?

## 5. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

### 5.1 Основные понятия и законы магнитных цепей

При решении электротехнических задач все вещества в магнитном отношении делятся на две группы:

- **ферромагнитные** (относительная магнитная проницаемость  $\mu \gg 1$ );
- **неферромагнитные** (относительная магнитная проницаемость  $\mu \approx 1$ ).

Для концентрации магнитного поля и придания ему желаемой конфигурации отдельные части электротехнических устройств выполняются из ферромагнитных материалов. Эти части называют **магнитопроводами** или **сердечниками**. Магнитный поток создается токами, протекающими по обмоткам электротехнических устройств, реже – постоянными магнитами. Совокупность устройств, содержащих ферромагнитные тела и образующих замкнутую цепь, вдоль которой замыкаются линии магнитной индукции, называют **магнитной цепью**.

#### 5.1.1 Величины, характеризующие магнитное поле

Магнитное поле характеризуется тремя векторными величинами, которые приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 Векторные величины, характеризующие магнитное поле

Наименование	Обозначение	Единицы измерения	Определение
Вектор магнитной индукции	$\vec{B}$	Тл (тесла)	Векторная величина, характеризующая силовое действие магнитного поля на ток по закону Ампера
Вектор намагниченности	$\vec{J}$	А/м	Магнитный момент единицы объема вещества
Вектор напряженности магнитного поля	$\vec{H}$	А/м	$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{J} = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{B},$ <p>где <math>\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}</math> Гн/м – магнитная постоянная</p>

Основные скалярные величины, используемые при расчете магнитных цепей, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2 Скалярные величины, характеризующие магнитную цепь

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Определение
Магнитный поток	$\Phi$	Вб (вебер)	Поток вектора магнитной индукции через поперечное сечение $S$ магнитопровода $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$
Магнитодвижущая (намагничивающая) сила МДС (НС)	$F$	А	$F = Iw$ , где $I$ - ток в обмотке, $w$ - число витков обмотки
Магнитное напряжение	$U_M$	А	Линейный интеграл от напряженности магнитного поля $U_M = \int_a^b \vec{H} d\vec{L}$ , где $a$ и $b$ – граничные точки участка магнитной цепи, для которого определяется $U_M$ .

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются зависимостью  $B(H)$  магнитной индукции от напряженности магнитного поля. При этом различают **кривые намагничивания**, представляющие собой однозначные зависимости  $B(H)$ , и **гистерезисные петли** – неоднозначные зависимости  $B(H)$  (см. рис. 5.1).

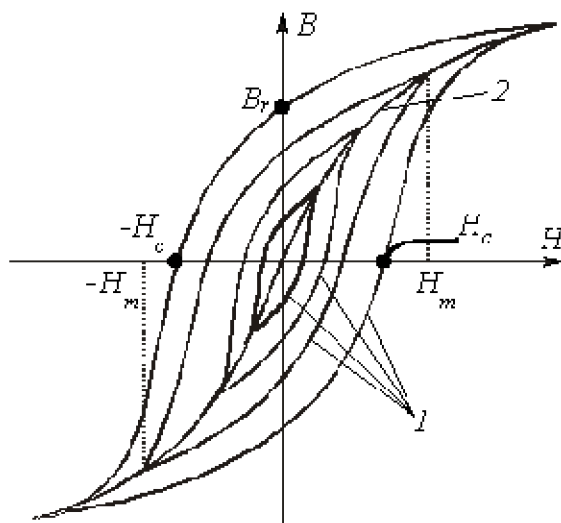


Рис. 5.1 Кривая намагничивания и петли гистерезиса

Основные понятия, характеризующие зависимости  $B(H)$ , приведены в табл. 5.3

Таблица 5.3 Основные понятия, характеризующие зависимости  $B(H)$ 

Понятие	Определение
Магнитный гистерезис	Явление отставания изменения магнитной индукции $B$ от изменения напряженности магнитного поля $H$
Статическая петля гистерезиса	Зависимость $B(H)$ , получаемая путем ряда повторных достаточно медленных изменений магнитной напряженности в пределах выбранного значения $\pm H_m$ (см. кривые 1 на рис. 5.1). Площадь статической петли гистерезиса характеризует собой потери на магнитный гистерезис за один период изменения магнитной напряженности
Начальная кривая намагничивания	Кривая намагничивания предварительно размагниченного ферромагнетика ( $B=0; H=0$ ) при плавном изменении магнитной напряженности $H$ . Представляет собой однозначную зависимость $B(H)$ и обычно близка к основной кривой намагничивания
Основная кривая намагничивания	Геометрическое место вершин петель магнитного гистерезиса (см. кривую 2 на рис. 5.1). Представляет собой однозначную зависимость $B(H)$
Предельная петля гистерезиса (предельный цикл)	Симметричная петля гистерезиса при максимально возможном насыщении
Коэрцитивная (задерживающая) сила	Напряженность магнитного поля $H_c$ , необходимая для доведения магнитной индукции в предварительно намагниченном ферромагнетике до нуля. В справочной литературе обычно дается для предельной петли гистерезиса
Остаточная индукция	Значение индукции магнитного поля $B_r$ при равной нулю напряженности магнитного поля. В справочной литературе обычно дается для предельного цикла

### 5.1.2 Магнитомягкие и магнитотвердые материалы

Перемагничивание ферромагнитного материала связано с расходом энергии на этот процесс. Как уже указывалось, площадь петли гистерезиса характеризует энергию, выделяемую в единице объема ферромагнетика за один цикл перемагничивания. В зависимости от величины этих потерь и соответственно формы петли гистерезиса ферромагнитные материалы

подразделяются на магнитомягкие и магнитотвердые. Первые характеризуются относительно узкой петлей гистерезиса и круто поднимающейся основной кривой намагничивания; вторые обладают большой площадью гистерезисной петли и полого-поднимающейся основной кривой намагничивания.

Магнитомягкие материалы (электротехнические стали, железоникелевые сплавы, ферриты) определяют малые потери в сердечнике и применяются в устройствах, предназначенных для работы при переменных магнитных потоках (трансформаторы, электродвигатели и др.). Магнитотвердые материалы (углеродистые стали, вольфрамовые сплавы и др.) используются для изготовления постоянных магнитов.

### 5.1.3 Статическая и дифференциальная магнитные проницаемости

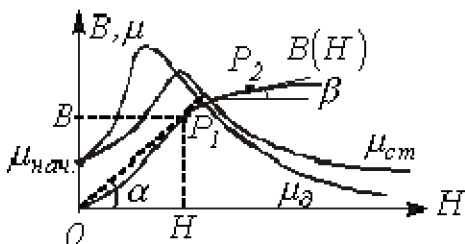
**Статическая магнитная проницаемость** (в справочниках начальная и максимальная)

$$\mu_{cm} = \frac{1}{\mu_0} \frac{B}{H} \Big|_{P_1} = m_{\mu} \operatorname{tg} \alpha \quad (5.1)$$

определяется по основной кривой намагничивания и в силу ее нелинейности не постоянна по величине (см. рис. 5.2).

Величина  $\mu_{нач}$  определяется тангенсом угла наклона касательной в начале кривой  $B(H)$ .

Кроме статической, вводится понятие **дифференциальной магнитной проницаемости**, устанавливающей связь между бесконечно малыми приращениями индукции и напряженности.



$$\mu_d = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \Big|_{P_2} = m_{\mu} \operatorname{tg} \beta \quad (5.2)$$

Кривые  $\mu_{cm}(H)$  и  $\mu_d(H)$  имеют две общие точки: начальную и точку, соответствующую максимуму  $\mu_{cm}$  (см. рис. 5.2).

Рис. 5.2 Статическая и дифференциальная магнитные проницаемости

При учете петли гистерезиса статическая магнитная проницаемость, определяемая согласно (5.1), теряет смысл. При этом значения  $\mu_d$  определяют по восходящей ветви петли при  $dH > 0$  и по нисходящей – при  $dH < 0$ .

При переменном магнитном потоке вводится также понятие **динамической магнитной проницаемости**, определяемой соотношением, аналогичным (5.2) по динамической характеристике.



## Контрольные вопросы

1. На какие группы делятся материалы с точки зрения магнетизма?
2. Назовите основные величины, характеризующие магнитное поле? Их единицы измерения?
3. Что такое петля гистерезиса?
4. Что такое кривая намагничивания?
5. Как размагнитить ферромагнетик?
6. Что такое остаточная индукция, индукция насыщения и коэрцитивная сила?
7. Что такое магнитомягкие и магнитотвердые материалы?
8. Что такое статическая и дифференциальная магнитная проницаемость?

### 5.1.4 Законы магнитных цепей

В основе расчета магнитных цепей лежат два закона (см. табл. 5.4).

Таблица 5.4 Основные законы магнитной цепи

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Закон (принцип) непрерывности магнитного потока	$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$	Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность равен нулю
Закон полного тока	$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum I$	Циркуляция вектора напряженности вдоль произвольного контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

При анализе магнитных цепей и, в первую очередь, при их синтезе обычно используют следующие допущения:

- магнитная напряженность, соответственно магнитная индукция, во всех точках поперечного сечения магнитопровода одинакова  $B = \Phi / S$ ;
- потоки рассеяния отсутствуют (магнитный поток через любое сечение неразветвленной части магнитопровода одинаков);
- сечение воздушного зазора равно сечению прилегающих участков магнитопровода.

Это позволяет использовать при расчетах законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей (см. табл. 5.5), вытекающие из законов, сформулированных в табл. 5.4.

Таблица 5.5 Законы Кирхгофа и Ома для магнитных цепей

Наименование закона	Аналитическое выражение закона	Формулировка закона
Первый закон Кирхгофа	$\sum \Phi = 0$	Алгебраическая сумма магнитных потоков в узле магнитопровода равна нулю
Второй закон Кирхгофа	$\sum F = \sum U_M = \sum Hl$	Алгебраическая сумма падений магнитного напряжения вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС, действующих в контуре
Закон Ома	$U_M = \Phi R_M,$ где $R_M = \frac{1}{\mu\mu_0} \frac{l}{S}$	Падение магнитного напряжения на участке магнитопровода длиной $l$ равно произведению магнитного потока и магнитного сопротивления $R_M$ участка

Сформулированные законы и понятия магнитных цепей позволяют провести формальную аналогию между основными величинами и законами, соответствующими электрическим и магнитным цепям, которую иллюстрирует табл. 5.6

Таблица 5.6 Аналогия величин и законов для электрических и магнитных цепей

Электрическая цепь	Магнитная цепь
Ток $I, A$	Поток $\Phi, B\phi$
ЭДС $E, B$	МДС (НС) $F, A$
Электрическое сопротивление $R,$ $Om$	Магнитное сопротивление $R_M, Hn^{-1}$
Электрическое напряжение $U, B$	Магнитное напряжение $U_M, A$
Первый закон Кирхгофа: $\sum I = 0$	Первый закон Кирхгофа: $\sum \Phi = 0$
Второй закон Кирхгофа: $\sum E = \sum U$	Второй закон Кирхгофа: $\sum F = \sum U_M$
Закон Ома: $U = IR$	Закон Ома: $U_M = \Phi R_M$

### Контрольные вопросы

1. Какие векторные величины характеризуют магнитное поле?
2. Какие основные понятия связаны с петлей гистерезиса?
3. Что характеризует площадь гистерезисной петли?

4. Какие ферромагнитные материалы и почему используются для изготовления сердечников для машин переменного тока?
5. Назовите основные законы магнитного поля?
6. В чем заключаются основные допущения, принимаемые при расчете магнитных цепей?
7. Проведите аналогию между электрическими и магнитными цепями?
8. Магнитная индукция в сердечнике при напряженности  $H=200$  А/м составляет  $B=1,0$  Тл. Определить относительную магнитную проницаемость.

Ответ:  $\mu = 3979$ .

9. Определить магнитное сопротивление участка цепи длиной  $l = 10$  см и сечением  $S = 10$  см<sup>2</sup>, если  $\mu = 5 \cdot 10^3$ .

Ответ:  $R_M = 15915$  Гн<sup>-1</sup>.

10. В условиях предыдущей задачи определить падение магнитного напряжения на участке, если индукция  $B=0,8$  Тл.

Ответ:  $U_M = 12,7$  А.

## 5.2 Графический метод расчета ферромагнитных цепей

Важнейшим элементом в цепях переменного тока является катушка с ферромагнитным сердечником. В общем случае кривая зависимости  $\Psi(i)$  имеет вид гистерезисной петли, но, поскольку в устройствах, работающих при переменном напряжении, используются магнитные материалы с узкой петлей гистерезиса, в большинстве практических случаев допустимо при расчетах использовать основную (или начальную) кривую намагничивания.

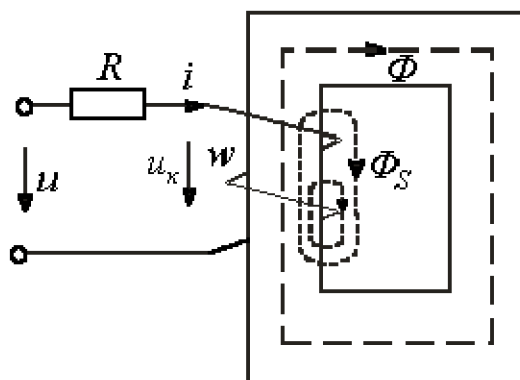


Рис. 5.3 Нелинейная катушка индуктивности

Условное изображение нелинейной катушки индуктивности приведено на рис. 5.3. Здесь  $\Phi$  – основной поток, замыкающийся по сердечнику,  $\Phi_S$  – поток рассеяния, которому в первом приближении можно поставить в соответствие потокосцепление рассеяния  $\Psi_S = L_S i$ , где индуктивность рассеяния  $L_S = const$  в

силу прохождения потоком  $\Phi_S$  части пути по воздуху.

Для схемы на рис. 5.3 справедливо уравнение

$$u = Ri + \frac{d\Psi}{dt} + L_S \frac{di}{dt}, \quad (5.3)$$

где  $\Psi = w\Phi$ ;  $u = U_m \sin \omega t$ .

В общем случае в силу нелинейности зависимости  $\Psi(t)$  определить на основании (5.3) несинусоидальные зависимости  $i(t)$  и  $\Psi(t)$  достаточно непросто. Вместе с тем для реальных катушек индуктивности падением напряжения  $Ri$  и э.д.с., обусловленной потоками рассеяния, вследствие их малости, часто можно пренебречь. При этом из (5.3) получаем

$$u = d\Psi / dt,$$

откуда

$$\Psi = \int u dt = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + A = -\Psi_m \cos \omega t + A$$

где  $\Psi_m = U_m / \omega$ ,  $A$  – постоянная интегрирования.

Так как характеристика  $\Psi(i)$  катушки (рис.5.4) симметрична относительно начала координат, а напряжение  $u(t)$  симметрично относительно оси абсцисс (оси времени), то кривая  $\Psi(t)$  также должна быть симметричной относительно последней, откуда следует, что  $A = 0$ .

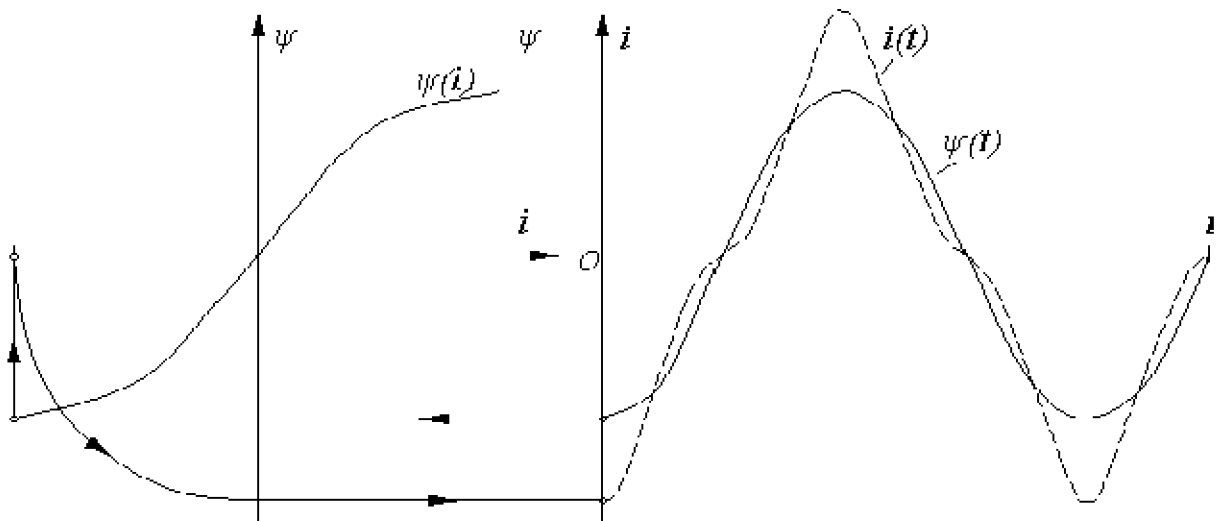


Рис. 5.4 Построение кривой зависимости  $i(t)$

Находя для различных значений  $\Psi(t)$  с использованием кривой  $\Psi(i)$  соответствующие им значения тока, строим по точкам (см. рис. 5.4) кривую зависимости  $i(t)$ .

Анализ полученного результата позволяет сделать важный вывод: при синусоидальной форме потока напряжение  $u_k = d\Psi/dt$  на катушке синусоидально, а протекающий через нее ток имеет явно выраженную несинусоидальную форму. Аналогично можно показать, что при синусоидальном токе поток, сцепленный с катушкой, и напряжение на ней несинусоидальны.

Для среднего значения напряжения, наведенного потоком, можно записать

$$U_k = 4K_\Phi fw\Phi_m = 4K_\Phi fw\Psi_m \quad (5.4)$$

Умножив (5.4) на коэффициент формы, получим выражение для действующего значения напряжения

$$U_{\text{ксп}} = 4fw\Phi_m = 4f\Psi_m \quad U_{\text{ксп}} = 4K_\Phi fw\Phi_m = 4f\Psi_m$$

В частности, если напряжение и поток синусоидальны, то

$$U_k = 4,44 fw\Phi_m = 4,44 f\Psi_m \quad (5.5)$$

Соотношение (5.5) является весьма важным: измеряя среднее значение напряжения, наведенного потоком, по (5.5) можно определить амплитуды потока  $\Phi_m$  и индукции  $B_m$  при любой форме нелинейности катушки.

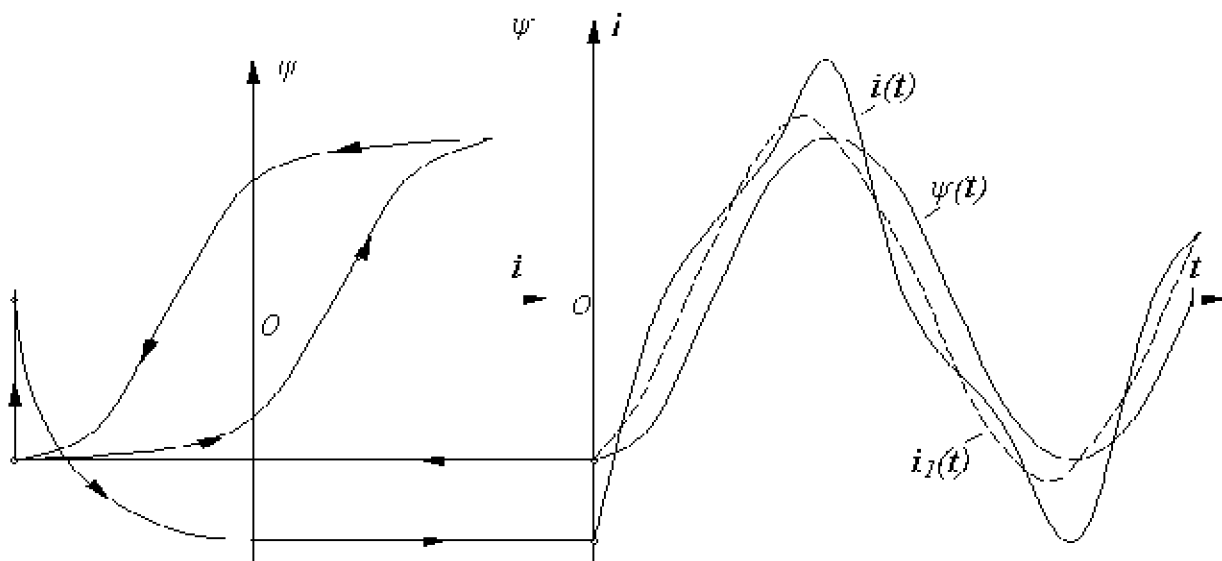


Рис. 5.5 Построение кривой  $i(t)$  при зависимости  $\Psi(t)$  в виде петли гистерезиса

Аналогично проводится построение кривой  $i(t)$  при синусоидальном потоке и задании зависимости  $\Psi(t)$  в виде петли гистерезиса. При этом следует помнить, что перемещение рабочей точки по петле осуществляется против часовой стрелки (см. рис. 5.5).

К полученному результату следует сделать следующий важный комментарий. Разложение построенной кривой  $i(t)$  в ряд Фурье показывает, что первая гармоника тока (см. кривую  $i_1(t)$  на рис. 5.5) опережает по фазе потокосцепление и, следовательно, отстает по фазе от синусоидального напряжения на катушке на угол, меньший  $90^\circ$ . Это указывает на потребление катушкой активной мощности, затрачиваемой на перемагничивание сердечника и определяемой площадью петли гистерезиса.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключаются особенности нелинейных цепей переменного тока?
2. Какие типы характеристик используются в цепях переменного тока для описания нелинейных элементов?
3. В каких случаях допустимо использование при расчетах идеальных ВАХ вентиляей?
4. Почему нельзя потокосцепление рассеяния катушки представить как произведение числа ее витков и потока рассеяния?
5. Как косвенным путем можно определить амплитуду индукции магнитного поля, сцепленного с катушкой?
6. Построить кривые  $\Phi(t)$  и  $u_k(t)$  при синусоидальном токе в нелинейной катушке.
7. Почему первая гармоника разложения кривой тока  $i_1(t)$  при учете гистерезисной петли отстает от напряжения на угол, меньший  $90^\circ$ ?
8. Определить амплитуду основного рабочего потока в сердечнике нелинейной катушки сечением  $S = 10 \text{ см}^2$ , если при числе витков  $\omega = 500$  среднее значение напряжения, обусловленного изменением потока,  $U_{\text{ср}} = 160 \text{ В}$ , частота  $f = 50 \text{ Гц}$ .

Ответ:  $B_m = 1,2 \text{ Тл}$ .

## 5.3 Феррорезонансные явления

### 5.3.1 Феррорезонанс в последовательной цепи

Различают феррорезонанс в последовательной цепи (**феррорезонанс напряжений**) и феррорезонанс в параллельной цепи (**феррорезонанс токов**).

Рассмотрим первый из них на основе схемы на рис. 5.6. Для этого строим (см. рис. 5.7) прямую зависимости  $U_C(I)$ , определяемую соотношением

$$U_C = \frac{1}{2\pi fC} I \quad (5.6)$$

Далее для двух значений сопротивлений  $R$  ( $R=0$  и  $R \neq 0$ ) строим графики зависимостей  $U(I)$ : для  $R=0$  – согласно соотношению  $U(I) = |U_L(I) - U_C(I)|$  (кривая  $a$  на рис. 5.8); для  $R \neq 0$  – согласно выражению  $U(I) = \sqrt{U_R^2(I) + (U_L(I) - U_C(I))^2}$  – (кривая  $b$  на рис. 5.8).

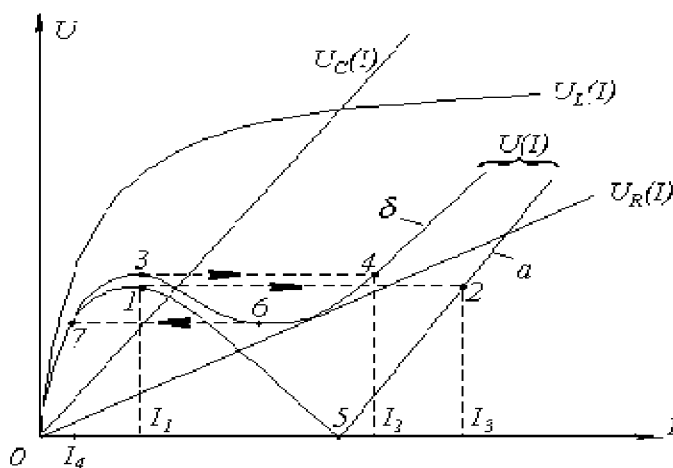
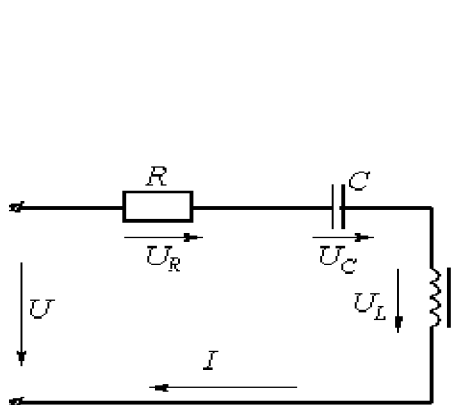


Рис. 5.6 Схема, в которой возникает феррорезонанс напряжений

Рис. 5.7 Построение кривых  $U(I)$  при феррорезонансе напряжений

Точка пересечения кривой  $U_L(I)$  с прямой  $U_C(I)$  соответствует феррорезонансу напряжений. Феррорезонансом напряжений называется такой режим работы цепи, содержащей последовательно соединенные нелинейную катушку индуктивности и конденсатор, при котором первая гармоника тока в цепи совпадает по фазе с синусоидальным питающим напряжением. В соответствии с данным определением при рассмотрении реальной катушки действительная вольт-амперная характеристика (ВАХ) цепи, даже при значении сопротивления последовательного включаемого резистора  $R = 0$ , в отличие от теоретической (кривая  $a$  на рис. 5.8) не касается оси абсцисс и смещается влево, что объясняется наличием высших гармоник тока, а также потерями в сердечнике катушки. С учетом последнего напряжение на катушке индуктивности  $U_k(I) = \sqrt{(R_k I)^2 + U_L(I)^2}$ , где  $R_k$  – сопротивление, характеризующее потери в сердечнике, в режиме феррорезонанса

$U_L(I) = U_C(I)$  не равно напряжению на конденсаторе.

Из построенных результирующих ВАХ цепи видно, что при увеличении питающего напряжения в цепи имеет место скачок тока: для кривой  $a$  – из точки 1 в точку 2, для кривой  $b$  – из точки 5 в точку 4. Аналогично имеет место скачок тока при снижении питающего напряжения: для кривой  $a$  – из точки 5 в точку 0; для кривой  $b$  – из точки 6 в точку 7. Явление скачкообразного изменения тока при изменении входного напряжения называется **триггерным эффектом в последовательной феррорезонансной цепи**.

В соответствии с уравнением

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C + \dot{U}_L \quad (5.7)$$

на рис. 5.8 и 5.9 построены векторные диаграммы для двух произвольных значений тока ( $I_2$  и  $I_4$ ) в режимах до и после резонанса для обеих ВАХ (для  $R=0$  – соответственно рис. 5.8,а и 5.8,б; для  $R \neq 0$  – рис. 5.9,а и 5.9,б); при этом соответствующие выбранным токам действующие значения напряжений, входящих в (5.7), взяты из графиков на рис. 5.8.

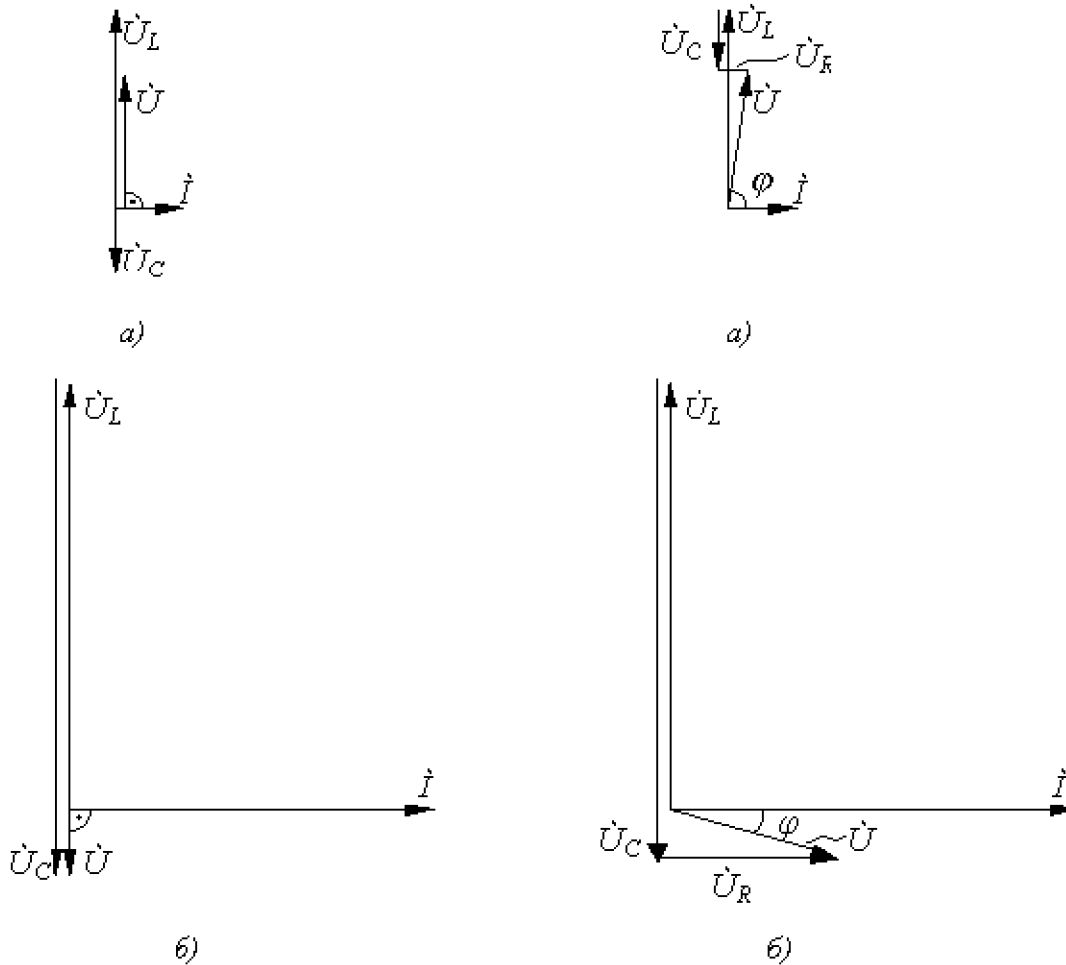


Рис. 5.8 Векторные диаграммы для  $R=0$

Рис. 5.9 Векторные диаграммы для  $R \neq 0$



Анализ векторных диаграмм позволяет сделать вывод, что в режиме до скачка тока напряжение на входе цепи опережает по фазе ток, а после скачка – отстает, т.е. в первом случае нагрузка носит индуктивный характер, а во втором – емкостной. Таким образом, скачок тока в феррорезонансной цепи сопровождается **эффектом опрокидывания фазы**.

### Контрольные вопросы

1. Что такое феррорезонанс напряжений?
2. Что такое триггерный эффект в последовательной резонансной цепи?
3. Что такое эффект опрокидывания фазы?
4. Нарисуйте семейство вольт-амперных характеристик, иллюстрирующих эффект феррорезонанса.
5. Нарисуйте векторные диаграммы, иллюстрирующие эффект феррорезонанса.

### 5.3.2 Феррорезонанс в параллельной цепи

Феррорезонанс в параллельной цепи рассмотрим на основе схемы на рис. 5.10. Для этого, как и в предыдущем случае, строим (см. рис. 5.11) прямую  $U_C(I_C)$ , определяемую выражением (5.6).

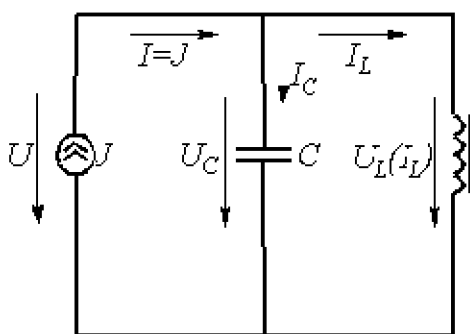


Рис. 5.10 Схема параллельного феррорезонанса

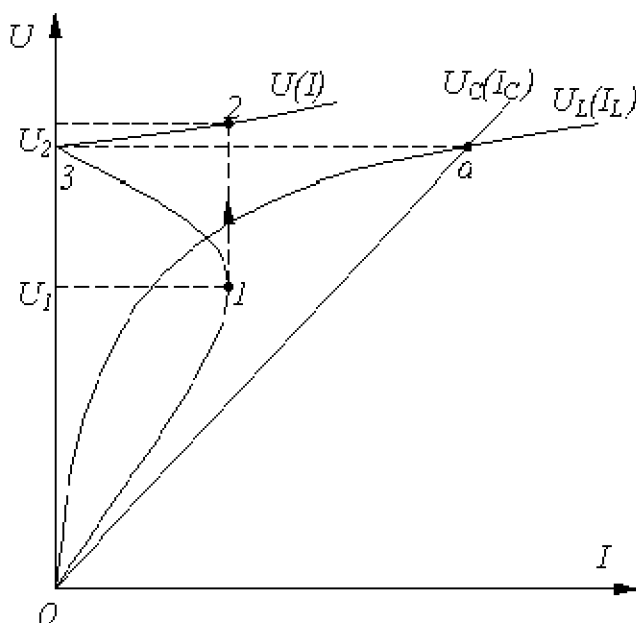


Рис. 5.11 Построение результирующей ВАХ

Далее, поскольку  $\dot{U} = \dot{U}_L = \dot{U}_C$ , в соответствии с соотношением  $I(U) = |I_C(U_C) - I_L(U_L)|$  строим результирующую ВАХ  $U(I)$  цепи.

Точка  $a$  пересечения кривой  $U_L(I_L)$  с прямой  $U_C(I_C)$  соответствует

феррорезонансу токов. Необходимо отметить, что в реальном случае действительная ВАХ цепи в отличие от теоретической не касается оси ординат, что объясняется наличием высших гармоник тока и неидеальностью катушки индуктивности.

Из построенной ВАХ  $U(I)$  видно, что при увеличении тока источника имеет место скачок напряжения. Явление скачкообразного изменения напряжения при изменении входного тока называется **триггерным эффектом в параллельной феррорезонансной цепи**.

На рис. 5.12 для двух (до и после резонанса) значений напряжения ( $U_1$  и  $U_2$ ) построены векторные диаграммы; при этом соответствующие выбранным напряжениям действующие значения токов  $I_L$  и  $I_{CV}$  взяты из графиков на рис. 5.12.

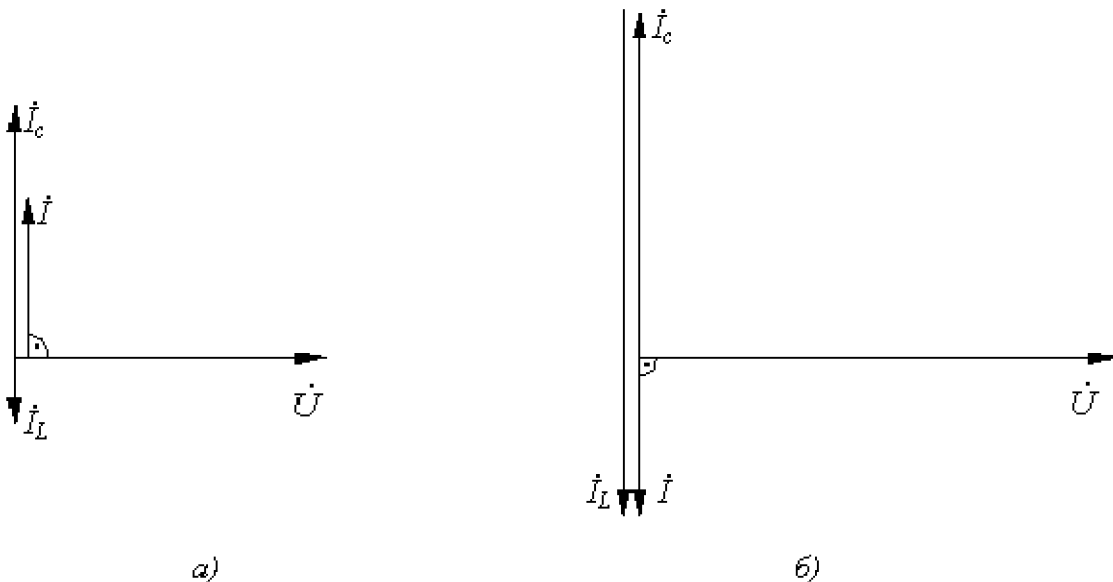


Рис. 5.12 Векторные диаграммы резонанса токов

Анализ векторных диаграмм показывает, что в режиме до скачка напряжения ток источника опережает по фазе входное напряжение (рис. 5.12, а), а после скачка (рис. 5.12, б) – отстает, т.е. в первом случае нагрузка носит емкостной характер, а во втором – индуктивный. Таким образом, скачок напряжения связан с эффектом опрокидывания фазы.

### Контрольные вопросы

1. Что такое феррорезонанс токов?
2. Что такое триггерный эффект в параллельной резонансной цепи?
3. Что такое эффект опрокидывания фазы в параллельной резонансной цепи?
4. Нарисуйте семейство вольт-амперных характеристик,

иллюстрирующих эффект феррорезонанса в параллельной резонансной цепи.

5. Нарисуйте векторные диаграммы, иллюстрирующие эффект феррорезонанса в параллельной резонансной цепи.

#### 5.4 Физические явления, заложенные в основу принципа действия электрических машин

Электрические машины служат для преобразования электрической энергии в механическую энергию – это двигатели, и для преобразования механической энергии в электрическую – это генераторы.

**Принцип действия электрического двигателя** основан на законе Ампера [4] согласно которому на проводник с током, помещённый в однородное магнитное поле, действует сила Ампера –  $F_A$ , модуль которой определяется по формуле:

$$F_A = I \cdot l \cdot \sin \alpha ,$$

где:  $I$  – величина тока,

$l$  – длина отрезка проводника, находящегося в магнитном поле,

$B$  – вектор магнитной индукции,

$\alpha$  – угол между направлениями вектора магнитной индукции и тока.

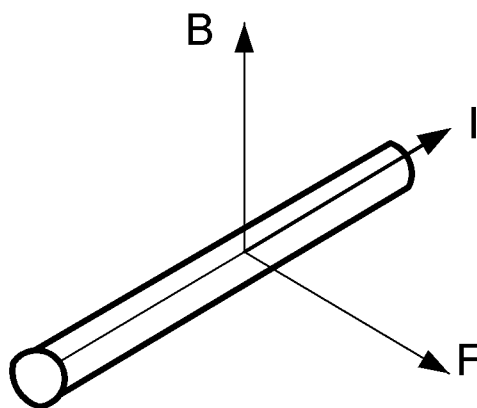


Рис. 5.13 Действие магнитного поля на отрезок проводника с током

Направление силы Ампера можно определить по **правилу левой руки**: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции  $B$  входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца совпадали бы с направлением тока, то отогнутый на 90 градусов большой палец покажет направление силы, действующей на отрезок проводника (рис. 5.13).

Из курса физики известно, что электрический ток создаёт вокруг себя магнитное поле. Существует и обратное явление: появление электрического

тока в проводниках при изменении магнитного поля. Это явление было открыто Фарадеем и получило название *электромагнитной индукции*. Фарадей установил, что индукционный электрический ток в замкнутом проводнике возникает в том случае, если проводник или какая-либо его часть пересекает линии магнитной индукции. Опыты Фарадея показали, что причиной появления индукционного тока является изменение магнитного поля. Ленц установил, что индукционный ток во всех случаях направлен таким образом, что его действие противоположно действию причины, вызвавшей этот ток.

Открытие электромагнитной индукции имело огромное научное и техническое значение. Оно показало, что можно получить электрический ток при помощи изменяющегося магнитного поля.

*Принцип действия генераторов* постоянного и переменного тока, трансформаторов, а так же многих других электрических машин основан на явлении электромагнитной индукции. Возникновение индукционного тока при электромагнитной индукции вызвано появлением в проводнике электродвижущей силы (э.д.с). Известно, что индукционный ток, а следовательно, и э.д.с. индукции появляются только в случае, если полное число линий индукции –  $B$ , проходящих через площадь –  $S$ , ограниченную проволочным контуром, изменяется. Отсюда следует вывод, что причиной появления э.д.с. электромагнитной индукции является *изменение магнитного потока* –  $\Phi$ . Магнитный поток –  $\Phi$  через плоскую поверхность площадью –  $S$  в случае однородного магнитного поля с индукцией –  $B$  определяется по формуле:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями векторов магнитной индукции и нормали к плоской поверхности.

Максвелл установил, что э.д.с. электромагнитной индукции –  $e$  пропорциональна скорости изменения магнитного потока через площадь, ограниченную контуром с током. Мгновенное значение э.д.с. –  $e$  определяется выражением:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Электродвижущая сила в проводнике, движущемся в однородном магнитном поле, определяется по формуле:

$$e = v \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha,$$

где:  $v$  – скорость проводника,

$l$  – длина проводника,

$B$  – вектор магнитной индукции,

$\alpha$  – угол между векторами скорости и магнитной индукции.

Направление тока в движущемся проводнике определяется по **правилу правой руки**: если правую руку расположить так, чтобы перпендикулярная к проводнику составляющая вектора магнитной индукции –  $\mathbf{B}$  входила в ладонь, а отогнутый на 90 градусов большой палец направить в сторону движения –  $\mathbf{v}$  проводника, тогда четыре вытянутых пальца покажут направление индукционного тока –  $\mathbf{i}$  (рис. 5.14).

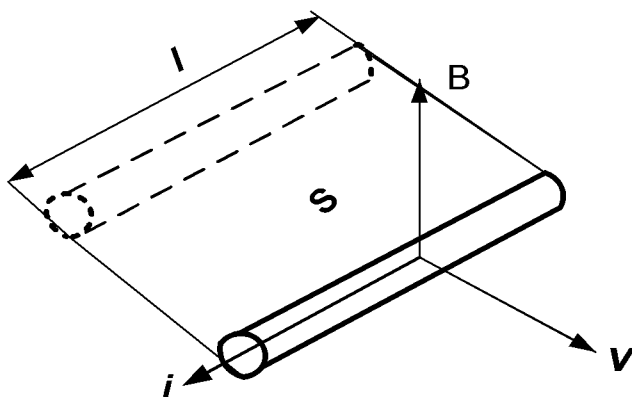


Рис. 5.14 Движение проводника в магнитном поле

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон Ампера.
2. Сформулируйте правило левой руки.
3. Как определить направление силы Ампера?
4. Сформулируйте закон Фарадея.
5. Как определяется направление индуктированной э.д.с.?
6. Правило правой руки.
7. Принцип действия генератора постоянного тока.

## 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

### 6.1 Возникновение переходных процессов в электрических цепях, законы коммутации

Ранее мы рассматривали установившиеся режимы работы электрических цепей. При этих режимах в результате (относительно) длительного действия источников электрической энергии устанавливались постоянные токи или синусоидальные токи определенной частоты и амплитуды. В судовом электрооборудовании очень часто происходят *переходные процессы*. Под *переходными процессами* понимают электромагнитные процессы, возникающие в электрических цепях при переходе от **одного установившегося** режима к **другому новому установившемуся** режиму. Если в электрической цепи был периодический режим до **переходного процесса**, то **после переходного процесса** в этой же цепи **установился другой периодический режим**, отличающийся чем-либо от предыдущего, например: по величине амплитуды, фазе, форме или частоте действующей в цепи э.д.с.; значением параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементов цепи. Другой периодический режим может установиться так же вследствие изменения конфигурации цепи.

*Переходные процессы* возникают в электрических цепях постоянного или переменного тока после *коммутации*, а также в результате скачкообразного изменения параметров  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементов.

*Коммутация* – это процесс замыкания или размыкания выключателей. При *коммутации* происходят процессы *подключения или отключения* к электрическим цепям источников электрической энергии (генераторов) или потребителей электрической энергии (на судах чаще всего это асинхронные двигатели компрессоров, насосов, лебёдок, брашпилей, вентиляторов и т.д.).

В результате *коммутации* в электрических цепях сначала устанавливается **переходной** режим, а после **переходного** режима **принуждённый** или **установившейся** режим. Установившемуся режиму в цепи соответствуют установившиеся токи и напряжения:

$$i_{ус} \text{ и } u_{ус}.$$

Если в цепи действует источник постоянного напряжения, в ней устанавливается постоянный ток  $I$ . Если в цепи действует источник синусоидального напряжения **одной частоты**, то **все токи и напряжения** установятся **той же частоты**. Если в цепи имеется ёмкость, напряжение на ёмкости достигает определённого значения.

Переходные процессы протекают быстро, обычно их длительность составляют десятые, сотые доли секунды. Тем не менее, переходные процессы необходимо изучать. Понимание переходных процессов даёт возможность

установить, как **деформируется** форма и амплитуда сигналов при прохождении сигналов через усилители, фильтры и другие устройства. Изучение переходных процессов позволяет определить вероятность повышения напряжения и токов на отдельных участках цепи (превышения напряжения и токов могут достигать десятков раз и окажутся опасными для изоляции электроустановок), а так же определить длительность переходных процессов.

Необходимо помнить, что при любых переходных и установившихся процессах **всегда выполняются два основных положения: ток через индуктивность и напряжение на ёмкости не могут изменяться скачком**.

Далее рассмотрим два закона коммутации.

### **Законы коммутации**

**Первый закон коммутации:** В любой ветви с **индуктивностью** ток в момент времени непосредственно до коммутации  $i_L(0_-)$  равен току после коммутации  $i_L(0_+)$ . После коммутации **ток** в этой ветви **начнёт изменение только** с того значения, которое он имел до коммутации  $i_L(0_-)$ :

$$i_L(0_-) = i_L(0_+), \quad (6.1)$$

где  $t = 0_-$  — это время за мгновение до коммутации,

$t = 0_+$  — это время через мгновение после коммутации.

Равенство (6.1) выражает первый закон коммутации.

Обоснуем **невозможность скачка тока через индуктивность**.

Если рассматривать включение ветви с катушкой индуктивности (рис. 6.1), то в момент коммутации ток в этой ветви будет равен нулю.

Если в такой ветви допустить скачек тока, то напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

при  $t = 0$  будет равно бесконечности, и в цепи не будет соблюдаться второй закон Кирхгофа, что, очевидно, не возможно. Доказательство **невозможности скачка тока** через индуктивность проведём на примере цепи рис. 6.1.

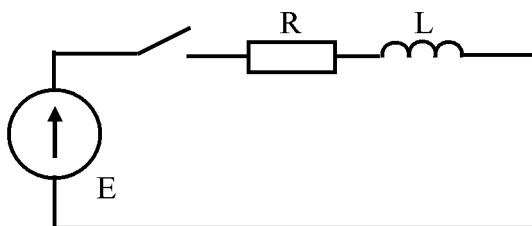


Рис. 6.1 Включение индуктивности в цепь с постоянной э.д.с.

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи рис. 5.1.1. при замкнутом ключе:

$$u_L + Ri = E, \quad (6.2)$$

или заменив  $u_L$  на  $L \frac{di}{dt}$  получим

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (6.3)$$

Ток  $i$  и э.д.с.  $E$  не могут принимать бесконечно большие значения исходя из технических возможностей электрооборудования. Если допустить возможность скачка тока, это означает, что за бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\Delta t$  стремится к нулю) ток изменится на конечную величину  $\Delta i$ . При этом  $\frac{\Delta i}{\Delta t} \rightarrow \infty$  (отношение  $\frac{\Delta i}{\Delta t}$  стремится к бесконечности). Если в уравнение (6.2) вместо  $L \frac{di}{dt}$  подставить  $\infty$ , то его левая часть (равная  $\infty$ ) не будет равна правой части, что приведёт к невыполнению второго закона Кирхгофа.

**Следовательно, допущение о возможности скачка тока при включении индуктивности в цепь противоречит второму закону Кирхгофа.**

*Ток* через индуктивность *не может изменяться скачком*, но *напряжение* на индуктивности равно

$$u_L = L \frac{di}{dt},$$

*может измениться скачком.* Это не противоречит второму закону Кирхгофа.

### Второй закон коммутации:

В любой цепи **напряжение** на ёмкости в момент времени непосредственно до коммутации  $u_C(0_-)$  равно напряжению  $u_C(0_+)$  на этой же ёмкости после коммутации. После коммутации **напряжение** на ёмкости **начнёт изменение только** с того значения  $u_C(0_-)$ , которое оно имело до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \quad (6.4)$$

Время  $t = 0_-$  – это время непосредственно до коммутации, время  $t = 0_+$  – это время непосредственно после коммутации. Равенство (6.4) выражает второй закон коммутации.

Обоснуем *невозможность скачка напряжения на ёмкости.*

Если рассматривать включение ветви с **конденсатором (ёмкостью  $C$ )**, который не был заряжен в цепь (рис. 5.1.2), то в момент коммутации



напряжение на **конденсаторе** будет равно нулю.

Если допустить **скачок напряжения** на **конденсаторе** в момент коммутации, то ток

$$i(0) = C \frac{du_C}{dt}$$

при  $t = 0$  будет равен бесконечности и в цепи, всегда имеющей сопротивление, не будет соблюдаться второй закон Кирхгофа.

Доказательство **невозможности скачка напряжения** на ёмкости проведём на примере цепи рис. 6.2.

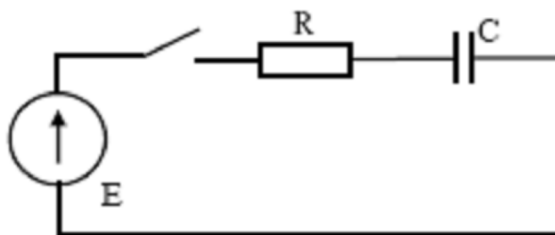


Рис. 6.2 Включение конденсатора в цепь с э.д.с. постоянного тока

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи рис. 6.2 при замкнутом ключе:

$$Ri + u_C = E \quad (6.5)$$

Так как  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , получим

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (6.6)$$

Если допустить скачок напряжения  $u_C$ , то  $\frac{\Delta u_C}{\Delta t} \rightarrow \infty$  и левая часть уравнения (6.6) не будет равна правой части, что приведёт к невыполнению второго закона Кирхгофа.

Отсюда следует, что допущение о скачке напряжения на ёмкости при включении ёмкости в цепь противоречит второму закону Кирхгофа.

**Напряжение** на ёмкости **не может изменяться скачком**, но **ток через ёмкость**, равный

$$i = C \frac{du_C}{dt},$$

**может измениться скачком**. Это не противоречит второму закону Кирхгофа.

С энергетической точки зрения невозможно скачкообразное изменение энергии, запасённой в индуктивности и ёмкости, и соответственно невозможно мгновенное изменение тока в индуктивности и напряжения на ёмкости. Действительно, скачкообразное изменение энергии привело бы к выделению в индуктивности и ёмкости бесконечно больших мощностей, что так же лишено физического смысла.

### Контрольные вопросы

1. Что такое переходные процессы?
2. Что такое коммутация?
3. Что такое установившийся режим? Принужденный режим?
4. Сформулируйте первый закон коммутации.
5. Возможен ли скачок тока в ёмкости? В резисторе?
6. Возможен ли скачок тока в резисторе?
7. Обоснуйте невозможность скачка тока в индуктивности.
8. Возможен ли скачок напряжения на индуктивности?
9. Возможен ли скачок напряжения на резисторе?
10. Как записывается момент времени непосредственно до коммутации? Непосредственно после коммутации?

## 6.2 Переходный, установившийся (принуждённый) и свободный режим в электрических цепях

Рассмотрим общие вопросы расчёта переходных процессов на примере включения неразветвлённой цепи с  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементами к источнику синусоидального напряжения. Будем считать, что присоединяемая цепь не влияет на характер изменения напряжения источника для любого момента времени. Запишем второй закон Кирхгофа для цепи рис. 6.3.

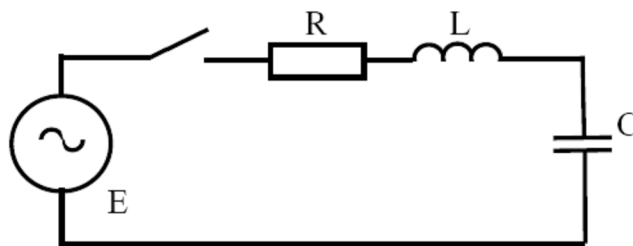


Рис. 6.3 Подключение  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементов к источнику синусоидального напряжения

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u, \quad (6.7)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int idt,$$

где  $i$  и  $u$  ток и напряжение переходного режима.

После завершения переходного процесса цепь переходит в установившийся режим, а напряжение источника не изменяется и остаётся равным первоначальному значению  $u$  (левая часть выражения (6.7)). В установившемся режиме выражение (6.7) примет вид:

$$Ri_{yc} + L \frac{di_{yc}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{yc} dt = u, \quad (6.8)$$

где  $i_{yc}$  ток установившегося режима.

Вычтем (6.8) из (6.7) и получим:

$$Ri_{cv} + L \frac{di_{cv}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{cv} dt = 0, \quad (6.9)$$

где

$$i - i_{yc} = i_{cv} \quad (6.10)$$

Выражение (6.8) запишем в виде напряжений на  $R$ ,  $L$ ,  $C$  элементах и получим уравнение (6.11) для напряжений, в котором напряжение в левой части равно нулю:

$$0 = u_{cv} + u_{Lcv} + u_{Ccv}, \quad (6.11)$$

Разность действительных токов и напряжений переходного режима ( $i$  и  $u$ ) и установившегося режима ( $i_{yc}$  и  $u_{yc}$ ) называется соответственно током и напряжением свободного режима ( $i_{cv}$  и  $u_{cv}$ ). Свободный режим возникает в цепи во время перехода от одного установившегося состояния к другому. В нашем случае цепь первоначально не была подключена к источнику, а затем её подключили к источнику, то есть произошёл переход из выключенного состояния во включенное.

Дифференциальное уравнение (6.9), у которого правая часть равна нулю, называется однородным (без правой части). Общее решение дифференциального уравнения без правой части соответствует режиму цепи при отсутствии внешнего источника электрической энергии (при  $u = 0$ ) и такой режим цепи называют **свободным**. **Токи и напряжения**, получаемые в результате общего решения однородного дифференциального уравнения без правой части (при  $u = 0$ ), **определяются только параметрами элементов цепи ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ) и называются свободными токами и напряжениями** ( $i_{cv}$  и  $u_{cv}$ ).

Как показывает уравнение (6.10), переходный процесс можно рассматривать как бы состоящим из двух, накладывающихся друг на друга, процессов: **установившегося**, если бы он мог установиться сразу, и

**свободного**, протекающего только во время переходного режима (то есть без внешнего источника).

После коммутации, благодаря свободному процессу, достигается постепенное и непрерывное (без скачков) приближение к новому, установившемуся, режиму цепи. Следовательно, в переходном режиме действительные значения напряжения  $u$  и тока  $i$  могут быть разложены на две составляющие: **установившегося** и **свободного** режимов:

$$\begin{aligned} i &= i_{yc} + i_{св} \\ u_R &= u_{Ryc} + u_{Rсв} \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$u_C = u_{Cyc} + u_{Cсв}$$

$$u_L = u_{LYc} + u_{Lсв}$$

Принцип наложения применим только для линейных цепей, поэтому указанное разложение **на две составляющие** допустимо только для линейных цепей. Физически существуют только действительные токи и напряжения ( $i$  и  $u$ ), а разложение их на установившиеся ( $i_{yc}$ ,  $u_{Ryc}$ ,  $u_{Cyc}$ ,  $u_{LYc}$ ) и свободные ( $i_{св}$ ,  $u_{Rсв}$ ,  $u_{Cсв}$ ,  $u_{Lсв}$ ) составляющие служит только для упрощения расчётов линейных цепей.

Из курса высшей математики известно, что решением или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция, которая, будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество. Решение дифференциальных линейных уравнений можно производить тремя методами: классическим, операторным и методом интеграла Дюамеля.

Рассмотрим **классический метод решения** дифференциальных линейных уравнений. В нашем случае решением уравнения (6.8) будет функция тока от времени. При непосредственном интегрировании общий интеграл линейных дифференциальных уравнений с правой частью (в уравнении 5.2.8 правой частью является  $u$ ) получается в результате суммирования частного решения данного неоднородного уравнения и его общего решения при равенстве нулю правой части (6.9), то есть однородного уравнения.

Решение однородных уравнений даёт величины свободных токов и напряжений ( $i_{св}$ ,  $u_{Rсв}$ ,  $u_{Cсв}$ ,  $u_{Lсв}$ ) и является показательной функцией вида

$$Ae^{pt} \tag{6.13}$$

Для всех переходных процессов условимся, что момент  $t = 0$  соответствует моменту коммутации.

Уравнение (6.9) показывает, что **свободный** ток представляет собой общее решение однородного дифференциального уравнения и, следовательно, должен содержать в своём выражении постоянные интегрирования, число которых равно порядку данного дифференциального уравнения.

В свою очередь уравнение (6.8) показывает, что *установившейся ток*  $i_{yc}$  представляет собой определённое частное решение неоднородного дифференциального уравнения (6.8). Тогда из первого равенства системы уравнений (6.12)

$$i = i_{yc} + i_{св} \quad (6.12)$$

заключаем, что *действительный ток*  $i$ , равный сумме  $i_{yc}$  и  $i_{св}$ , является *общим решением* того же самого неоднородного дифференциального уравнения (6.8).

### Контрольные вопросы

1. Что такое переходный режим в эл. цепях?
2. Что такое принужденный режим в эл. цепях?
3. Что такое свободный режим в эл. цепях?
4. Из каких составляющих состоит переходный режим?
5. Как определяется прижженный режим?
6. Как определяется свободный режим?
7. Изложить классический метод решения однородных диф. уравнений.

### 6.3 Начальные значения величин

Исходя из законов коммутации, можно найти **начальные значения** свободного тока и напряжения, что необходимо для определения постоянных интегрирования.

Под **начальными значениями** величин (чаще их называют *начальными условиями*) понимают значения токов и напряжений при  $t = 0$ .

Как ранее отмечалось, **токи через индуктивности и напряжения на ёмкостях** непосредственно после коммутации **равны** их значениям непосредственно **до коммутации**. **Остальные величины**: напряжения на индуктивностях, напряжения на активных сопротивлениях, токи через ёмкости, токи через активные сопротивления могут изменяться скачком, и поэтому их значения после коммутации (при  $t = 0_+$ ) чаще всего оказываются неравными значениям до коммутации (при  $t = 0_-$ ).

Для любой цепи после коммутации (при  $t = 0_+$ ) можно составить уравнения по законам Кирхгофа и из этих уравнений определить значения токов и напряжений на всех её участках в послекоммутационном режиме.

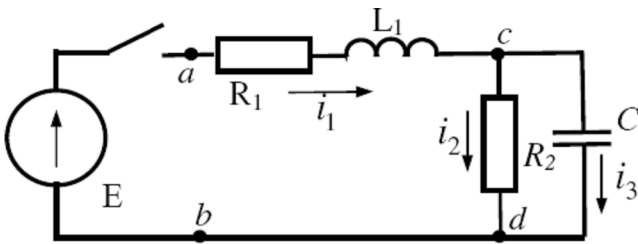
Если до коммутации все токи и напряжения на пассивных элементах цепи были равны нулю, то в цепи имеют место *нулевые начальные условия*.

Если до коммутации хотя бы часть токов и напряжений цепи не равны нулю, то в цепи имеют место *ненулевые начальные условия*.

При *нулевых начальных условиях* токи через индуктивности и напряжения на ёмкостях начнут изменяться с нулевых значений, при *ненулевых начальных условиях* – с тех значений, которые они имели непосредственно до коммутации.

#### 6.4 Составление уравнений для свободных токов и напряжений

Для послекоммутационной схемы составляют уравнения по законам Кирхгофа для полных токов и напряжений, так же как это делалось раньше: сначала обозначают токи в ветвях и произвольно для них выбирают положительные направления, затем составляют уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. Так, для схемы рис. 6.4 после выбора положительных направлений для токов:



$$i_1 - i_2 - i_3 = 0:$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + i_2 R_2 = E_2:$$

$$i_2 R_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0.$$

Рис. 6.4 Составление уравнений для свободных токов и напряжений

В этих уравнениях  $i_1$ ,  $i_2$  и  $i_3$  – полные токи. Каждый из них состоит из свободного и принужденного токов. Для того чтобы от этой системы уравнений перейти к уравнениям для свободных токов, освободим систему от вынуждающих э.д.с. (в нашем случае от э.д.с.  $E$ ) и вместо  $i_1$  запишем  $i_{1св}$ , вместо  $i_2$  –  $i_{2св}$  и т.д. Получим:

$$i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0:$$

$$L_1 \frac{di_{1св}}{dt} + R_1 i_{1св} + i_{2св} R_2 = 0: \quad (6.13)$$

$$i_{2св} R_2 - \frac{1}{C} \int i_{3св} dt = 0$$

Заметим, что для любого контура любой электрической цепи сумма падений напряжений от свободных составляющих токов равна нулю.

## Контрольные вопросы

1. Из каких условий определяются начальные значения величин?
2. Что такое начальные условия?
3. Если до коммутации через индуктивность шел ток, каковы должны быть начальные условия?
4. Если до коммутации конденсатор был предварительно заряжен, как это отразить в начальных условиях?
5. Как составляются уравнения для свободных токов и напряжений в эл. цепях?
6. Чему равна сумма падений напряжений от свободных составляющих токов?
7. Что такое докоммутационные начальные значения?
8. Что такое послекоммутационные начальные значения?

### 6.5 Короткое замыкание в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью

Рассмотрим случай подключения ветви с активным сопротивлением и индуктивностью к источнику постоянного напряжения с э.д.с.  $E$  и внутренним сопротивлением  $R_0$ . Предположим, что внезапно источник постоянного напряжения замыкается рубильником (рис.5.3.1). Найдём закон изменения тока от времени через катушку индуктивности.

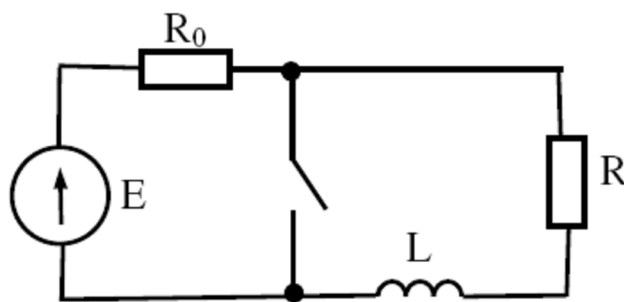


Рис. 6.5 Подключения ветви с активным сопротивлением и индуктивностью к источнику постоянного напряжения

До коммутации цепь находилась в установившемся режиме и ток через катушку индуктивности определяется из выражения:

$$i_{yc}(0_-) = \frac{E}{R + R_0}, \quad (6.14)$$

где  $E$  – э.д.с.,

$R$  – активное сопротивление катушки индуктивности,

$R_0$  – внутреннее сопротивление источника постоянного напряжения.

Реактивное сопротивление катушки индуктивности, которое определяется по формуле  $x_L = 2\pi fL$ , в данном случае равно нулю, так как ток постоянный  $f = 0$  и соответственно  $x_L = 0$ .

**После коммутации** наступает новый установившийся режим, при котором ток через катушку индуктивности становится равным нулю, так катушка индуктивности в результате коммутации оказывается отключённой от источника постоянного напряжения и в течение некоторого времени ток через неё уменьшается от  $i_{yc}(0_-)$  установившегося значения до коммутации, до нуля  $i_{yc}(0_+) = 0$ . Таким образом, уравнение (6.12)  $i = i_{yc} + i_{ce}$  при  $i_{yc}(0_+) = 0$  можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} i &= 0 + i_{ce}(0_+) \\ i &= i_{ce}(0_+) \end{aligned} \quad (6.15)$$

По аналогии с (6.9) для цепи (рис. 6.5) свободный ток после коммутации определяем из однородного дифференциального уравнения:

$$L \frac{di_{ce}}{dt} + Ri_{ce} = 0 \quad (6.16)$$

Его общее решение имеет вид:

$$i = i_{ce}(0_+) = Ae^{pt}, \quad (6.17)$$

где  $t$  – время,

$e$  – экспонента,

$p$  – постоянная, которую нужно определить.

Чтобы определить численное значение  $p$ , составляем **характеристическое уравнение** для (6.16) подставив в него значение свободного тока (6.17).

Найдём производную от свободного тока, и с учётом (6.17) получим

$$\frac{di_{ce}}{dt} = \frac{d(Ae^{pt})}{dt} = pAe^{pt} = pi_{ce}(0_+). \quad (6.18)$$

Подставим (6.18) в (6.16):

$$Lpi_{ce}(0_+) + Ri_{ce}(0_+) = 0$$



разделим полученное выражение на  $i_{cb}(0_+)$  и получим характеристическое уравнение

$$Lp + R = 0 \quad (6.19)$$

для цепи рис. 6.5 при замкнутом ключе.

Отсюда

$$p = -\frac{R}{L} \quad (6.20)$$

Переход от дифференциального уравнения (6.16) к алгебраическому уравнению (6.19) называется *алгебризацией дифференциального уравнения* для свободного тока.

Подставив (6.20) в (6.17), получим:

$$i = i_{cb}(0_+) = Ae^{-\frac{R}{L}t}. \quad (6.21)$$

При  $t = 0$  из (6.21) получим  $i = A$ , так как  $e^0 = 1$ .

Отсюда следует

$$i = i_{cb}(0) = A. \quad (6.22)$$

Здесь  $i_{cb}(0) = A$  – начальное значение свободного тока, кривая изменения которого от времени дана на рис. 6.6.

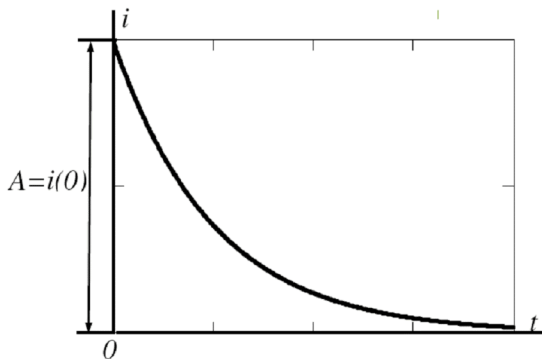


Рис. 6.6 Кривая изменения свободного тока от времени,  $i(0) = i_{cb}(0) = A$  – начальное значение свободного тока

Введём обозначение  $\frac{L}{R} = \tau$ ,

подставив  $\tau$  и  $A = i_{cb}(0)$  в (6.21) получим

$$i = i_{cb} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = i(0)_{cb} e^{-t/\tau} \quad (6.23)$$

Величина  $\tau = \frac{L}{R}$ , имеющая

размерность времени, называется **постоянной времени цепи**. Физический смысл постоянной времени цепи – это время, в течение которого свободный ток  $i_{cb} = i_{cb}(0) e^{-t/\tau}$ , затухая, уменьшается в  $e$

раз по сравнению со своим начальным значением  $i_{cb}(0)$  при  $t = 0$ . Подставим в (6.23) значение  $t = \tau$ ,

$$i_{cb}(\tau) = i_{cb}(0)e^{-t/\tau} = i_{cb}(0)e^{-1} = \frac{A}{e} \quad (6.24)$$

Величина, обратная постоянной времени цепи,

$$\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} \quad (6.25)$$

называется коэффициентом затухания цепи. Свободный ток затухает тем медленнее, чем меньше её коэффициент затухания  $\beta$ , т.е. чем больше индуктивность  $L$  и чем меньше сопротивление  $R$ .

Значение  $i_{cs}(0)$  является постоянной интегрирования  $A$  и определяется из начальных условий. Как было указано выше, под начальными условиями понимают значения токов и напряжений при  $t = 0$ . Из законов коммутации следует, что действительный ток в момент коммутации цепи (т.е. при  $t = 0$ ) не может измениться скачком.

Поэтому

$$i_{cs}(0) = i(0) = i_{yc}(0_-) = \frac{E}{R + R_0} \quad (6.26)$$

Из соотношения (6.22) следует, что величину постоянной интегрирования  $A$  можно определить, подставив значения  $i(0)$  в (6.26):

$$A = \frac{E}{R + R_0} \quad (6.27)$$

Подставив значение  $A$  из (6.27) в (6.21) получим выражение для действительного тока через катушку индуктивности при переходном процессе:

$$i = i_{cs}(0_+) = A e^{-t/\tau} = \frac{E}{R + R_0} e^{-t/\tau} \quad (6.28)$$

Электродвижущая сила самоиндукции в рассматриваемой цепи  $e = -L \frac{di}{dt}$  (при  $t = 0$ ) равна напряжению на сопротивлении  $R$  и в момент коммутации поддерживает значение тока на начальном уровне

$$e_L = -u_L = i_{cs}(0_+)R = R \frac{E}{R + R_0} e^{-t/\tau} = R \frac{E}{R + R_0} e^0,$$

$$e_L = -u_L = R \frac{E}{R + R_0}.$$

С энергетической точки зрения в процессе короткого замыкания цепи с индуктивностью вся энергия магнитного поля, запасённая в магнитном поле катушки до коммутации цепи, в течении переходного процесса превращается в тепловую энергию. Теоретически процесс уменьшения тока через короткозамкнутую катушку длится долго, но практически для многих катушек заканчивается очень быстро.

Если через катушку до коммутации цепи протекал переменный ток, то

характер переходного процесса не изменится и  $i(0)$  будет также значением тока в момент короткого замыкания.

**В качестве примера** переходного процесса рассмотрим явления, возникающие при необходимости быстрого снятия возбуждения мощной электрической машины (например, судового синхронного генератора). Если цепь обмотки возбуждения генератора просто разомкнуть, то, даже учитывая электрическую дугу при выключении, оказывается, что ток будет стремиться очень быстро, уменьшиться до нуля (отношение  $\frac{di}{dt}$  будет очень велико). Так как обмотка возбуждения имеет большую индуктивность  $L_{возб}$ , то в ней наводится значительная по величине э.д.с. самоиндукции  $e_L = -L_{возб} \frac{di}{dt}$ .

Она может быть причиной пробоя изоляции на корпус электрической машины или изоляции между витками обмотки возбуждения. Поэтому **обмотки возбуждения** электрической машины **не отключают** от источника постоянного напряжения, **а замыкают на разрядный резистор**, в котором энергия электромагнитного поля превращается в тепловую энергию.

В результате такого переключения в цепи обмотки возбуждения электрической машины **не происходит опасного повышения напряжения**.

При отсутствии в цепи обмотки возбуждения резистора, подключенного параллельно к ней, отключение обмотки возбуждения от источника постоянного напряжения может также привести к возникновению электрической дуги между контактами выключателя, разрывающими цепь. **Образование дуги** вызвано наведением э.д.с самоиндукции. А именно, после разрыва цепи между контактами выключателя образуется воздушный изоляционный промежуток, но согласно первому закону коммутации, ток через обмотку возбуждения не может мгновенно, т.е. скачком, снизиться до нуля. Уменьшение тока через обмотку возбуждения, т.е. его изменение во времени, вызывает наведение э.д.с самоиндукции и повышение напряжения в её витках. При этом энергия магнитного поля, накопленная в обмотке возбуждения, преобразуется в воздушном промежутке (между размыкающимися контактами) в энергию электрического поля. Быстрый рост напряжения на воздушном промежутке сопровождается соответствующим ростом напряжения в воздушном промежутке между размыкающимися контактами до тех пор, пока не произойдёт электрический пробой воздушного промежутка и не возникнет дуга, замыкающая обмотку возбуждения на источник напряжения. Дуга может вызвать расплавление контактов, если не принимать специальные меры.

**Для устранения дуги** применяют дугогасящие устройства, которые создают повышенное давление в зоне контактов и улучшают охлаждение дуги.

При росте давления и снижении температуры ухудшаются условия ионизации воздушного промежутка. Обычно дуга гасится в течение десятых долей секунды.

### 6.5 Отключение индуктивной катушки от источника постоянного напряжения

Рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 6.7. До коммутации (переключатель  $\Pi$  в положении 1) ток через катушку с индуктивностью  $L$  и активным сопротивлением  $R_K$  определяется э.д.с. источника постоянного напряжения  $E$  и активным сопротивлением катушки  $R_K$ . Реактивное сопротивление катушки индуктивности в данном случае равно нулю, так как ток постоянный  $f = 0$  и соответственно  $x_L = 0$ .

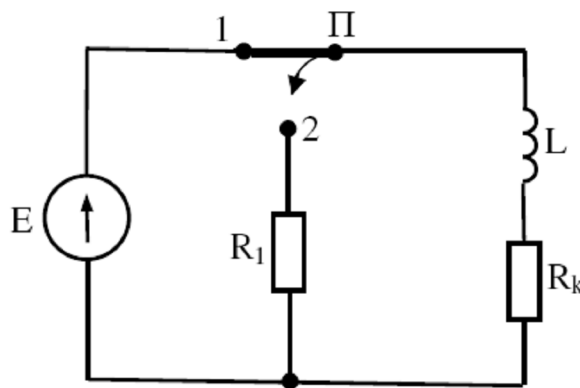


Рис. 6.7 Отключение катушки индуктивности от источника постоянного напряжения

Установившийся до коммутации ток через катушку индуктивности определяется по закону Ома

$$i_{yc}(0_-) = \frac{E}{R_K} \quad (6.29)$$

После коммутации (перевод переключателя  $\Pi$  в положение 2) ток через катушку индуктивности в первый момент времени, согласно первому закону коммутации, остаётся неизменным (6.29). После коммутации ток замыкается по цепи через катушку индуктивности  $L$  и  $R_1$  и  $R_K$ . Цепь после коммутации оказывается отключенной от источника постоянного напряжения, и её электрическое состояние описывается однородным дифференциальным уравнением с правой частью, равной нулю:

$$L \frac{di_{cs}}{dt} + (R_K + R_1)i_{cs} = 0. \quad (6.30)$$

Равенство нулю правой части в уравнении (6.30) означает, что внешняя э.д.с. в данной цепи отсутствует. Если в цепи отсутствует э.д.с., то после коммутации установившейся ток будет равен нулю  $i_{yc} = 0$ , следовательно, переходный ток  $i$  в соответствии с уравнением (6.12)

$$i = i_{yc} + i_{cb} = 0 + i_{cb}$$

будет равен свободному току и общее решение дифференциального уравнения (6.30) будет иметь вид такой же, как и (6.17)

$$i = i_{cb} = Ae^{pt} \quad (6.31)$$

Подставим в (6.30) значение  $i_{cb}$  согласно (6.31) и получим

$$L \frac{d(Ae^{pt})}{dt} + (R_K + R_1)Ae^{pt} + 0. \quad (6.32)$$

Найдём производную от свободного тока и с учётом (6.31), получим

$$\frac{di_{cb}}{dt} = \frac{d(Ae^{pt})}{dt} = pAe^{pt} = pi_{cb}.$$

Подставив значение производной  $\frac{di_{cb}}{dt} = pi_{cb}$  в (6.32), имеем:

$$Lpi_{cb} + (R + R_K)i_{cb} = 0,$$

откуда получим характеристическое уравнение

$$Lp + (R + R_K) = 0,$$

решая которое относительно  $p$  получаем:

$$p = -\frac{R_K + R_1}{L}$$

Постоянную  $A$  определим из начальных условий (т.е. при  $t = 0$ ). Из законов коммутации следует, что действительный ток в момент коммутации цепи (т.е. при  $t = 0$ ) не может измениться скачком.

$$i_{cb}(0) = i(0) = i_{yc}(0_-) = Ae^0 = A.$$

Величину постоянной интегрирования  $A$  можно определить, подставив значения  $i(0)$  в (6.29), и получим

$$A = \frac{E}{R_K}.$$

Здесь  $i_{cb}(0) = A$  – начальное значение свободного тока.

Подставив значение  $A$  и  $p$  в (6.31), получим окончательно решение дифференциального уравнения (6.30)

$$i = i_{cb} = Ae^{pt} = \frac{E}{R_K} e^{-\frac{R_K + R_1}{L}t}.$$

Если сопротивление резистора  $R_1$ , на который замыкается катушка индуктивности, после отключения от источника постоянного напряжения в « $n$ » раз больше активного сопротивления катушки  $R_K$ , т.е.  $R_1 = nR_K$ , то напряжение на резисторе  $R_1$  в начальный момент после коммутации будет в « $n$ » раз больше приложенного к цепи напряжения.

$$U_{R_1}(0) = R_1 i(0) = R_1 \frac{U}{R_K} = nR_K \frac{U}{R_K} = nU,$$

где  $U$  – приложенное к цепи напряжение.

Ранее отмечалось, что увеличение напряжения необходимо учитывать при быстром отключении обмотки возбуждения генератора от источника постоянного напряжения, а именно обмотку возбуждения замыкают на разрядный резистор (в данном случае  $R_I$ ).

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит алгебраизация дифференциального уравнения?
2. Как определить постоянную времени для LR-цепи?
3. Что такое постоянная времени?
4. Назовите единицы измерения постоянной времени.
5. Какие устройства используются в коммутационной аппаратуре для устранения дуги?
6. Объясните механизм образования эл. дуги.
7. Можно ли внезапно разомкнуть цепь возбуждения эл. машины? Почему?
8. Как давление и температура способствуют горению дуги?

## 6.7 Переходные процессы в простейших электрических цепях

### *Включение цепи R-L на постоянное напряжение*

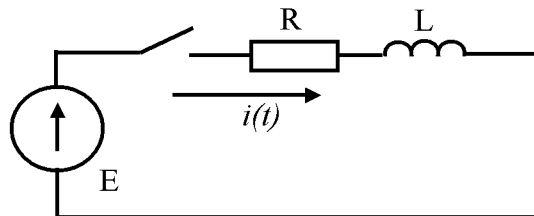


Рис. 6.8 Включение цепи R-L на постоянное напряжение

В общем случае во время переходного процесса по второму закону Кирхгофа имеем:

$$iR + L \frac{di}{dt} = E$$

Ток переходного процесса состоит из принужденной  $i_{np}$  и свободной  $i_{св}$  составляющих:

$$i = i_{np} + i_{св}.$$

Принужденная составляющая определяется из режима, когда переходной процесс закончится. В нашем случае:

$$i_{np} = \frac{E}{R}.$$

Свободная составляющая находится из решения однородного дифференциального уравнения, которое получается из исходного при равенстве нулю правой части:

$$iR + L \frac{di}{dt} = 0$$

Разделяем переменные:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

Интегрируем:

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln A,$$

где  $\ln A$  - постоянная интегрирования.

Полученное выражение потенцируем:

$$\frac{i}{A} = e^{-\frac{R}{L} t} \text{ или } i = Ae^{-t/\tau},$$

где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная времени.

Это выражение для свободной составляющей, т.е.

$$i_{св} = Ae^{-t/\tau}.$$

Тогда:

$$i = i_{np} + i_{св} = Ae^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

Значение постоянной интегрирования  $A$  определяем из начальных условий:

$$i_{(t=0)} = 0,$$

т.е.  $0 = Ae^{-0/\tau} + \frac{E}{R}$ , откуда  $A = -\frac{E}{R}$ .

С учетом изложенного, получаем:

$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$  – уравнение восходящей экспоненты рис. 6.9.

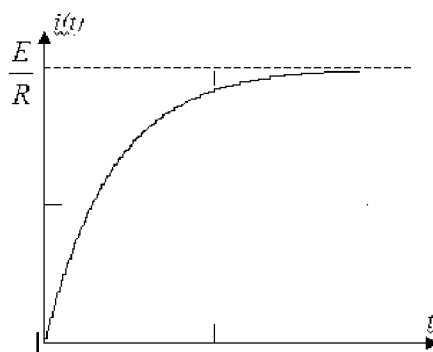


Рис. 6.9 Восходящая экспонента

### Включение цепи R-C на постоянное напряжение

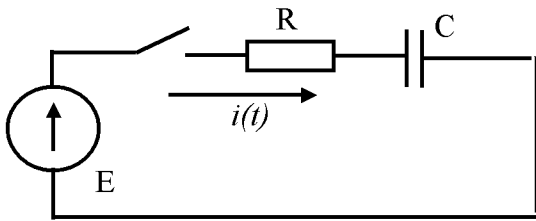


Рис. 6.10 Включение цепи R-C на постоянное напряжение

Рассмотрим, как изменяется напряжение на емкости во время переходного процесса. В общем случае по второму закону Кирхгофа имеем:

$$iR + u_C = E,$$

где  $u_C$  – напряжение на емкости.

Учитывая, что для данной цепи

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \text{ получаем:}$$

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = E.$$

Напряжение  $u_C$  состоит из принужденной  $u_{Cпр}$  и свободной  $u_{Cсв}$  составляющих:

$$u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}.$$

Принужденная составляющая определяется из режима, когда переходной процесс закончится. В нашем случае

$$u_{Cпр} = E.$$

Свободная составляющая находится из решения однородного дифференциального уравнения, которое получается из исходного при равенстве нулю правой части:

$$CR \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Разделяем переменные:

$$CR \frac{du_C}{dt} = -u_C.$$

Интегрируем:

$$\ln u_C = -\frac{1}{RC}t + \ln A,$$

где  $\ln A$  – постоянная интегрирования.

Полученное выражение потенцируем:

$$\frac{u_C}{A} = e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{или} \quad u_C = Ae^{-t/\tau},$$

где  $\tau = RC$  – постоянная времени.

Это выражение для свободной составляющей, т.е.

$$u_{Cсв} = Ae^{-t/\tau}.$$

Тогда



$$u_C = u_{C_{св}} + u_{C_{нр}} = Ae^{-t/\tau} + E.$$

Значение постоянной интегрирования  $A$  определяем из начальных условий:

$$u_{C(t=0)} = 0,$$

т.е.  $0 = Ae^{-0/\tau} + E$ , откуда  $A = -E$ .

С учетом изложенного, получаем:

$$u_C = E(1 - e^{-t/\tau}) - \text{уравнение восходящей экспоненты.}$$

### Контрольные вопросы

1. Из каких составляющих представляется ток или напряжение при расчете переходных процессов?
2. Чему равна постоянная времени для RL- цепи?
3. Чему равна постоянная времени для RC- цепи?
4. Приведите уравнение восходящей экспоненты.
5. Приведите уравнение падающей экспоненты.
6. Когда можно считать, что переходной процесс практически закончился?
7. Какова длительность переходного процесса (теоретическая)?

### 6.8 Составление характеристического уравнения

Алгебраизируем систему уравнений (6.13).

$$\begin{cases} i_{1св} - i_{2св} - i_{3св} = 0: \\ (L_1 p + R_1) i_{1св} + i_{2св} R_2 = 0: \\ i_{2св} R_2 - i_{3св} / (Cp) = 0. \end{cases}$$

В полученной системе определитель системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ L_1 p + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что непременным условием является  $\Delta = 0$ , получаем:

$$\frac{R_2}{Cp} + R_2(L_1 p + R_1) + \frac{L_1 p + R_1}{Cp} = 0$$

или

$$\frac{p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2}{pC} = 0.$$

Если дробь равна нулю, то равен нулю ее числитель. Следовательно,

$$p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-(R_1 R_2 C + L_1) \pm \sqrt{(R_1 R_2 C + L_1)^2 - 4(R_1 + R_2)R_2 L_1 C}}{2R_2 L_1 C} \quad (6.33)$$

**Составление характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления на переменном токе.**

Характеристическое уравнение для определения  $p$  часто составляют более простым способом, чем с помощью законов Кирхгофа. С этой целью составляют выражение входного сопротивления двухполюсника на переменном токе [обозначим его  $Z(j\omega)$ ], заменяют в нем  $j\omega$  на  $p$  [получают  $Z(p)$ ] и приравнивают  $Z(p)$  нулю.

Уравнение  $Z(p) = 0$  совпадает с характеристическим. Такой способ составления характеристического уравнения предполагает, что в схеме отсутствуют магнито-связанные ветви. Если же магнитная связь между ветвями имеется, то предварительно следует осуществить развязывание магнито-связанных ветвей.

Пример. Для схемы рис. 6.4 входное сопротивление относительно зажимов  $ab$  при переменном токе

$$z_{ab}(j\omega) = j\omega L_1 + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}$$

Заменим в нем  $j\omega$  на  $p$  и приравняем его нулю:

$$z_{ab}(p) = pL_1 + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{p^2 L_1 C R_2 + p(L_1 + R_1 R_2 C) + R_1 + R_2}{1 + R_2 C p} = 0,$$

или

$$p^2 R_2 L_1 C + p(R_1 R_2 C + L_1) + R_1 + R_2 = 0$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением (6.33), полученным по законам Кирхгофа. Это уравнение получено путем использования выражения для входного сопротивления первой ветви схемы рис. 6.4 относительно зажимов  $ab$ . Такое же уравнение можно получить, если записать выражение для входного сопротивления любой другой ветви.

### Контрольные вопросы

1. Что такое характеристическое уравнение?
2. Как составляется характеристическое уравнение в общем случае?
3. Как составляются уравнения для свободных токов?
4. Почему равенство определителя системы для свободных токов является непрелым условием?
5. Чему равно характеристическое уравнение для простейшей RL- цепи?
6. Чему равно характеристическое уравнение для простейшей RC- цепи?
7. В чем состоит метод составления характеристического уравнения путем использования выражения для входного сопротивления на переменном токе?

### 6.9 Определение степени характеристического уравнения

Степень характеристического уравнения необходимо уметь оценить, взглянув на схему, в которой исследуется переходной процесс. Быстрая ориентация в этом вопросе дает возможность определить трудоемкость предстоящих выкладок и способствует выявлению ошибки, если она возникнет при составлении характеристического уравнения.

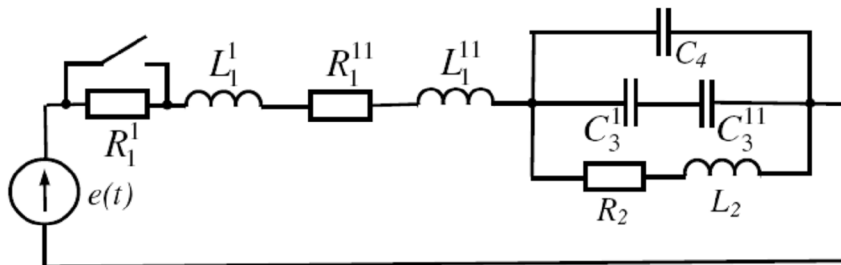


Рис. 6.11 К определению степени характеристического уравнения.

Исходная схема

Степень характеристического уравнения равна числу основных независимых начальных значений в послекоммутационной схеме после максимального ее упрощения и не зависит от вида э.д.с. источников э.д.с. в этой схеме.

Упомянутое упрощение состоит в том, что последовательно соединенные индуктивности должны быть заменены одной эквивалентной; емкости, включенные последовательно и параллельно, тоже должны быть заменены эквивалентной.

Так, применительно к схеме рис. 6.11 последовательно включенные  $L_1^1$  и  $L_1^{11}$  следует заменить на  $L_1 = L_1^1 + L_1^{11} \pm 2M$ , если между ними есть магнитная связь

(если нет магнитной связи, то  $M = 0$ ), а емкость  $C_3^1$ ,  $C_3^{11}$  и  $C_4$  - на емкость

$$C_5 = C_4 + \frac{C_3^1 C_3^{11}}{C_3^1 + C_3^{11}}$$

Начальное напряжение на емкости  $C_5$  равно начальному напряжению на емкости  $C_4$ .

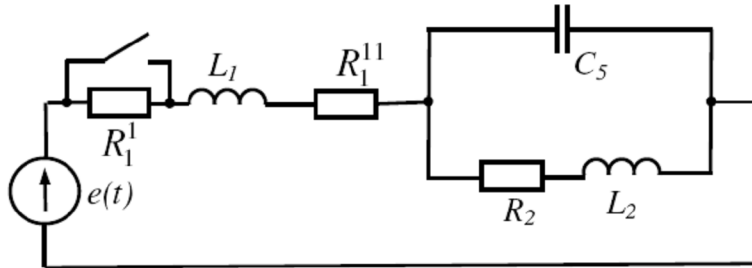


Рис. 6.12 Упрощенная схема

В результате упрощений схемы рис. 6.11 получаем схему рис. 6.12, в которой две индуктивности и одна емкость. Все три независимые начальные значения – основные. Следовательно, характеристическое уравнение будет третьей степени.

Также степень характеристического уравнения не зависит от того, имеется ли магнитная связь между индуктивностями схемы или она отсутствует. Еще одно замечание. Если после максимального упрощения схема содержит контур, состоящий только из емкостей, скажем из  $n$  емкостей, включенные между  $n$  узлами, сумма напряжений вдоль этого контура равна нулю по второму закону Кирхгофа, то только на  $n - 1$  емкостях этого контура напряжения могут быть заданы независимо от остальных. Отсюда следует, что при определении степени характеристического уравнения из  $n$  емкостей этого контура должны быть приняты во внимание только  $n - 1$  емкость.

Аналогично, если в каком-либо узле схемы после ее максимального упрощения сходится  $m$  ветвей и в каждой из них имеется индуктивность, то при определении степени характеристического уравнения должны быть приняты во внимание  $m - 1$  индуктивность.

Обобщенно можно сказать, что после максимального упрощения схемы степень характеристического уравнения может быть определена путем подсчета величины  $n_L + n_C - y_L - k_C$ , где  $n_L$  – число индуктивностей в схеме,  $n_C$  – число емкостей,  $y_L$  – число индуктивностей, токи в которых не могут быть заданы произвольно,  $k_C$  – число емкостей, направления на которых не могут быть заданы произвольно.

И последнее, если схема с источником тока имеет несколько последовательных участков, содержащих параллельно соединенные ветви с  $R, L, C$ , то для каждой группы параллельных ветвей будет свое

характеристическое уравнение со своими корнями (свободные токи не могут замыкаться через источник тока, поскольку его сопротивление равно бесконечности).

### Контрольные вопросы

1. Что такое характеристическое уравнение?
2. Как определить степень характеристического уравнения?
3. Для чего определяется степень характеристического уравнения?
4. Чему равна степень характеристического уравнения?
5. Можно ли считать, что подключение в схему дополнительной емкости, параллельно основной, повышает степень характеристического уравнения?
6. Можно ли считать, что подключение в схему дополнительной емкости, последовательно к основной, повышает степень характеристического уравнения?
7. Можно ли считать, что подключение в схему дополнительной индуктивности, параллельно основной, повышает степень характеристического уравнения?
8. Возможна ли степень характеристического уравнения выше первой при наличии в схеме только емкостей и резисторов? Индуктивностей и резисторов?

### 6.10 Свойства корней характеристического уравнения

Число корней характеристического уравнения равно степени этого уравнения. Так, если характеристическое уравнение представляет собой уравнение первой степени, то оно имеет один корень, если второй степени, – два корня и т.д. Уравнение первой степени имеет всегда отрицательный действительный (не мнимый и не комплексный) корень.

Уравнение второй степени может иметь:

- а) два действительных неравных отрицательных корня;
- б) два действительных равных отрицательных корня;
- в) два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

Уравнение третьей степени может иметь:

- а) три действительных неравных отрицательных корня;
- б) три действительных отрицательных корня, из которых два равны друг другу;
- в) три действительных равных отрицательных корня;
- г) один действительный отрицательный корень и два комплексно-сопряженных корня с отрицательной действительной частью.

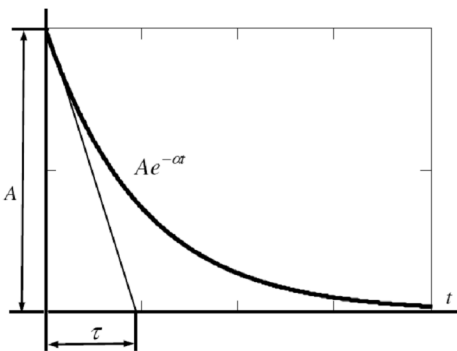
## Отрицательные знаки действительных частей корней характеристических уравнений

Свободный процесс происходит в цепи, освобожденной от источников э.д.с. Он описывается слагаемыми вида  $Ae^{pt}$ . В цепи, освобожденной от источников э.д.с., свободные токи не могут протекать длительно, так как в цепи отсутствуют источники энергии, которые были бы способны в течение сколь угодно длительного времени покрывать тепловые потери от свободных токов, т.е. свободные токи должны затухать во времени.

Но если свободные токи должны затухать во времени, то действительная часть  $p$  должна быть отрицательной.

Рассмотрим характер изменения свободных составляющих для простейших переходных процессов в цепях с характеристическим уравнением первой и второй степеней.

Если число корней характеристического уравнения больше двух, то свободный процесс может быть представлен как процесс, составленный из нескольких простейших процессов.



### Характер свободного процесса при одном корне.

Когда характеристическое уравнение имеет один корень, свободный ток

$$i_{св} = Ae^{-at},$$

где  $p = -a$  — зависит только от параметров цепи,  $A$  — от параметров цепи, э.д.с. и момента включения (рис. 6.13).

Рис. 6.13 Переходный процесс при одном корне

За интервал времени  $t = \tau = 1/a$ , где  $\tau$  — постоянная времени, функция  $Ae^{-at}$  уменьшится в  $e=2,71$  раза. Действительно, при  $t = \tau = 1/a$

$$at = a\tau = a/a = 1; e^{-at} = e^{-a\tau} = e^{-1} = 1/e = 1/2,71.$$

### Характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях.

Пусть  $p_1 = -a$  и  $p_2 = -b$  (для определенности положим  $b > a$ ), тогда

$$i_{св} = A_1e^{-at} + A_2e^{-bt}.$$

Характер изменения свободного тока при различных по величине и знаку постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  качественно иллюстрируется кривыми рис.6.14, а-г; кривая 1 представляет собой функцию  $A_1e^{-at}$ ; кривая 2 — функцию

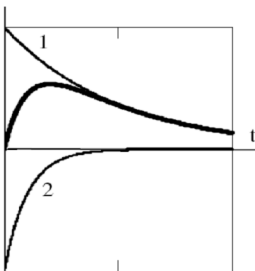
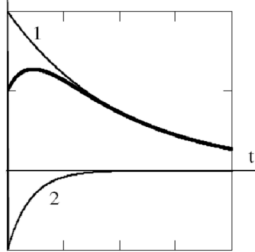
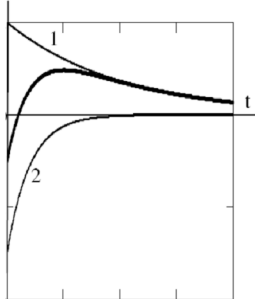
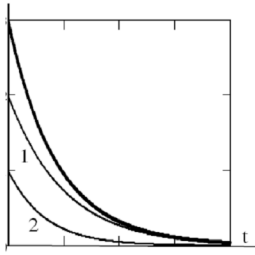


Рис. 6.14

Переходной  
процесс при двух  
неравных корнях

$A_2 e^{-bt}$ ; результирующая («жирная») кривая получена путем суммирования ординат кривых 1 и 2.

Для рис. 6.14. а  $A_1 > 0$  и  $A_2 > 0$ ; для рис. 6.14. б  $A_1 > 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $|A_2| > A_1$ ; для рис. 6.14. в  $A_1 > 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $|A_2| < A_1$ , для рис. 6.14. г  $A_1 > 0$ ,  $A_2 < 0$ ,  $|A_2| = A_1$ .

### Характер свободного процесса при двух равных корнях

Известно, что если среди корней характеристического уравнения есть два равных корня  $p_1 = p_2 = -a$ , то

соответствующие слагаемые решения должны быть взяты в виде

$$A e^{pt} + A_2 t e^{pt} = (A_1 + A_2 t) e^{-at}.$$

На рис. 6.15 построены пять кривых. Они показывают возможный характер изменения функции  $(A_1 + A_2 t) e^{-at}$  при различных постоянных интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ , а также когда одна из постоянных равна нулю.

Кривая 1 при  $A_1 > 0$  и  $A_2 > 0$ ;

кривая 2 при  $A_1 < 0$  и  $A_2 > 0$ ;

кривая 3 при  $A_1 > 0$  и  $A_2 < 0$ ;

кривая 4 при  $A_1 = 0$  и  $A_2 > 0$ ;

кривая 5 при  $A_1 > 0$  и  $A_2 = 0$ ;

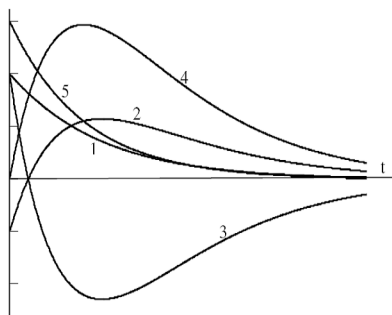


Рис. 6.15 Переходной  
процесс при двух равных  
корнях

### Характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях

Комплексные корни всегда встречаются попарно сопряженными. Так, если  $p_1 = -\delta + j\omega_0$ , то  $p_2 = -\delta - j\omega_0$ .

Соответствующее им слагаемое решения должно быть взято в виде

$$i_{ce} = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \nu).$$

Эта формула описывает затухающее синусоидальное колебание (рис. 6.16) при

угловой частоте  $\omega_0$  и начальной фазе  $\nu$ . Огибающая колебания определяется кривой  $Ae^{-\delta t}$ . Чем больше  $\delta$ , тем быстрее затухает колебательный процесс;  $A$  и  $\nu$  определяются значениями параметров схемы, начальными условиями и величиной э.д.с. источника;  $\omega_0$  и  $\delta$  зависят только от параметров цепи после коммутации;  $\omega_0$  называют угловой частотой свободных колебаний,  $\delta$  – коэффициентом затухания.

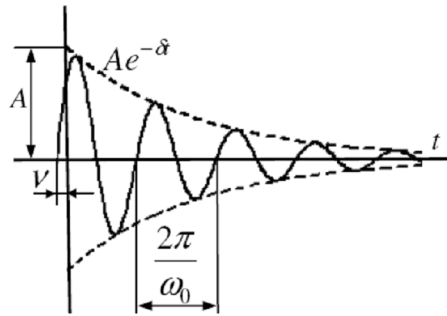


Рис. 6.16 Переходной процесс при двух комплексно-сопряженных корнях

### Контрольные вопросы

1. Чему равно число корней характеристического уравнения?
2. Может ли действительная часть корней характеристического уравнения быть положительной?
3. Что означает, что действительная часть корней характеристического уравнения отрицательна?
4. Опишите характер свободного процесса при одном корне характеристического уравнения.
5. Опишите характер свободного процесса при двух действительных неравных корнях характеристического уравнения.
6. Опишите характер свободного процесса при двух действительных равных корнях характеристического уравнения.
7. Опишите характер свободного процесса при двух комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения.



**ЛИТЕРАТУРА**

1. Атабеков Г. И. *Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи*. Санкт–Петербург, Лань, 2008. 592 с.
2. Башарин С. А., Федоров В. В. *Теоретические основы электротехники : Теория электрических цепей и электромагнитного поля : учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений*. Москва : ИЦ Академия, 2010. 368 с.
3. Бессонов Л. А. *Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учебник для бакалавров*. Москва : Юрайт, 2013. 701 с.
4. Буртаев Ю. В. Овсянников П. Н. *Теоретические основы электротехники*. Москва : Книжный дом Либроком, 2013. 552 с.
5. *Теоретические основы электротехники : в 3–х т. : учебник для вузов. 4–е изд.* / Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин Н. В., Чечурин В. Л. Санкт–Петербург: Питер, 2003. 463 с.
6. *Основы теории цепей : учебник* / Зевеке Г. В., Ионкин П. А., Нетушил А. В., Страхов С. В. Москва : Энергоатомиздат, 1989. 528 с.
7. Каплянский А. Е., Лысенко А. П., Полотовский Л. С. *Теоретические основы электротехники*. Москва : Высшая школа, 1972. 448 с.
8. Лоторейчук Е. А. *Теоретические основы электротехники : учебник*. Москва : ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА–М, 2013. 320 с.
9. Миткевич В. Ф. *Физические основы электротехники*. Москва : Ленанд, 2015. 512 с.
10. Прянишников В. А. *Теоретические основы электротехники : курс лекций*. Санкт–Петербург : КОРОНА–принт, 2012. 368 с.
11. Шегедин О. І. Маляр В. С. *Теоретичні основи електротехніки. Частина 1 : навч. посіб.* Львів : Магнолія, 2006, 2010. 168 с.
12. Bird J. *Electrical circuit theory and technology*. Elsevier, 2002. 984 p.
13. Hall D. T. *Practical marine electrical knowledge*. London : Witherby & Co Ltd, 1999. 223 p.

## Оглавление

<b>Предисловие.....</b>	<b>3</b>
<b>1. Цепи постоянного тока.....</b>	<b>6</b>
1.1 Элементы электрической цепи.....	6
1.2 Электрический ток, напряжение, сопротивление.....	8
1.3 Анализ простых цепей постоянного тока.....	11
1.4 Электрическая мощность и энергия.....	15
1.5 Основные законы и уравнения электрических цепей.....	16
1.6 Методы решения электрических цепей.....	19
1.6.1 Метод контурных токов.....	19
1.6.2 Метод наложения.....	22
1.6.3 Метод узловых потенциалов.....	23
1.6.4 Замена нескольких параллельных ветвей, содержащих источники э.д.с. и источники тока, одной эквивалентной.....	25
1.6.5 Метод двух узлов.....	27
1.6.6 Метод эквивалентного генератора.....	28
<b>2. Цепи однофазного переменного тока.....</b>	<b>31</b>
2.1 Основные понятия о цепях однофазного синусоидального тока..	31
2.2 Среднее и действующее значение синусоидально изменяющейся величины.....	32
2.3 Изображение синусоидальных функций времени вращающимися векторами.....	33
2.4 Элементы идеализированной цепи.....	34
2.5 Последовательное соединение $R, L, C$ .....	39
2.6 Мощность в цепи переменного тока.....	43
2.7 Токи в цепи с параллельным соединением $R, L, C$ идеальных элементов.....	45
2.8 Расчёт цепей однофазного синусоидального тока.....	46
2.9 Резонанс напряжений.....	47
2.10 Резонанс токов.....	51
2.11 Комплексные числа. Основные законы электротехники в комплексной форме.....	54
2.11.1 Способы изображения синусоидальных величин.....	54
2.11.2 Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.....	57
2.11.3 Выражение мощности в комплексной форме записи.....	58
<b>3. Трёхфазные цепи.....</b>	<b>60</b>
3.1 Трёхфазная система э.д.с. ....	60
3.2 Соединение фаз генератора и нагрузки «звездой».....	62
3.3 Соединение фаз генератора и приемника треугольником.....	64
3.4 Соединение «звезда-звезда» с нулевым проводом и без него.....	65
3.5 Режимы работы трёхфазных цепей.....	66
3.5.1 Симметричная нагрузка.....	66
3.5.2 Несимметричная нагрузка.....	67
3.6 Аварийные режимы работы трёхфазных цепей.....	69
3.7 Соединение потребителей треугольником.....	72

3.8 Мощность трехфазной цеп.....	74
3.9 Метод симметричных составляющих.....	77
3.10 Круговое вращающееся поле.....	80
3.11 Применение кругового вращающегося поля.....	84
3.11.1 Принцип работы асинхронного двигателя.....	84
3.11.2 Указатель последовательности чередования фаз.....	85
3.12 Коэффициент мощности трехфазных приемников и способы его повышения.....	86
<b>4. Несинусоидальные и нелинейные цепи.....</b>	<b>88</b>
4.1 Несинусоидальные цепи.....	88
4.2 Особенности расчета линейной электрической цепи с несинусоидальными источниками.....	92
4.3 Мощность при несинусоидальных токах и напряжениях.....	93
4.4 Высшие гармоники в трехфазных цепях.....	96
4.5 Нелинейные цепи переменного тока.....	100
4.6 Графические методы расчета нелинейных цепей.....	102
<b>5. Магнитные цепи.....</b>	<b>105</b>
5.1 Основные понятия и законы магнитных цепей.....	105
5.1.1 Величины, характеризующие магнитное поле.....	107
5.1.2 Магнитомягкие и магнитотвердые материалы.....	107
5.1.3 Статическая и дифференциальная магнитные проницаемости.....	108
5.1.4 Законы магнитных цепей.....	109
5.2 Графический метод расчета ферромагнитных цепей.....	111
5.3 Феррорезонансные явления.....	114
5.3.1 Феррорезонанс в последовательной цепи.....	114
5.3.2 Феррорезонанс в параллельной цепи.....	117
5.4 Физические явления, заложенные в основу принципа действия электрических машин.....	119
<b>6. Переходные процессы в линейных электрических цепях.....</b>	<b>122</b>
6.1 Возникновение переходных процессов в электрических цепях, законы коммутации.....	122
6.2 Переходный, установившийся (принужденный) и свободный режимы в электрических цепях.....	126
6.3 Начальные значения величин.....	129
6.4 Составление уравнений для свободных токов и напряжений.....	130
6.5 Короткое замыкание в цепи с активным сопротивлением и Индуктивностью.....	131
6.6 Отключение индуктивной катушки от источника постоянного напряжения.....	136
6.7 Переходные процессы в простейших электрических цепях.....	138
6.8 Составление характеристического уравнения.....	141
6.9 Определение степени характеристического уравнения.....	143
6.10 Свойства корней характеристического уравнения.....	145
<b>Литература.....</b>	<b>149</b>

Підручник корисний судновим електромеханікам і електрикам, слухачам курсів підготовки суднових електриків і курсів допідготовки суднових вахтових механіків для отримання сертифікатів 2-х і старших механіків у морських тренажерних центрах.

У підручнику викладаються основи електротехніки для суднових електромеханіків таким чином, щоб отримані знання могли бути використані для забезпечення найбільш ефективної, економічно вигідної та безпечної експлуатації суднового електрообладнання. Викладений матеріал підібраний відповідно до Кодексу підготовки та дипломування моряків і несення вахти (Розділ А-III / 6, А-III / 7) і IMO MODEL COURSE № 7.08 офіцер-електротехнік.

Навчальне видання

**Голощанов** Сергій Степановіч  
**Колєбанов** Александр Константинович

## **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

Навчальний посібник  
(рос. мовою)

Відповідальний за випуск *Р. Є. Врублевський*,  
Коректор *Грем Н. М.*,  
Технічний редактор *Т. О. Радул*,  
Друк, фальцювальні-палітурні роботи *В. Г. Удов*

Формат 60x84/16. Папір офсетний.  
Ум. друк. арк. 9,5  
Підписано до друку року 03.02.2020  
Тираж 50 примірників.

Видавництво  
Херсонська державна морська академія,  
просп. Ушакова, 20, м. Херсон, 73000  
Тел.: 49–20–20  
Ел. адреса: [rvv@ksma.ks.ua](mailto:rvv@ksma.ks.ua)

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої  
справи до Державного реєстру  
ДК № 4319 від 10.05.2012